

Math. A.

90. ℓ.

Math. H. 90 L

Giesen

Beiträge
zur
Attractionstheorie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der philosophischen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Bonn

eingereicht am 7. Mai und mit den beigefügten Thesen
vertheidigt am 2. August 1869

von

Arnold Giesen.

Opponenten:

Dr. P. Jörres, Rector d. höhern Schule in Ahrweiler.

Dr. O. W. Thomé, Lehrer an d. Realschule I. O. in Cöln.

W. Schmitter, Lehrer an d. kath. Realschule in Düren.

Bonn,
Druck von Carl Georgi.
1869.

526 A

Beilage

III

Attestationstheorie



1801

Erklärung der Bezeichnung

Die untenstehende Tabelle der Bezeichnung der Bezeichnung

von

Erklärung der Bezeichnung der Bezeichnung
Erklärung der Bezeichnung der Bezeichnung

von

Arnold Gieseler

Erklärung der Bezeichnung

Die untenstehende Tabelle der Bezeichnung der Bezeichnung
Die untenstehende Tabelle der Bezeichnung der Bezeichnung
Die untenstehende Tabelle der Bezeichnung der Bezeichnung

Bonn

Druck von Carl Giese

1801

Einleitung.

Durch die ausgedehnten Arbeiten einer Reihe der berühmtesten Mathematiker, eines Legendre, Laplace, Green, Gauss u. A. hat die Theorie der Potentialfunction für mehrere Zweige der mathematischen Physik eine weitgreifende Bedeutung erlangt.

In der Attractionstheorie kommt es zunächst auf die Untersuchung des Potentials solcher Körper an, welche eine ellipsoidische Begrenzung haben, eben weil alle uns näher bekannten Himmelskörper mit einer Ausnahme (die Saturnringe) jene Gestalt darbieten. Es sind daher diese Untersuchungen auch in den verschiedensten Richtungen angestellt worden. Für die Anwendung ist es indess nicht günstig, dass schon das Potential eines homogenen Ellipsoides eine verhältnissmässig verwickelte Gestalt besitzt, indem ja bekanntlich in der Potentialformel für ein Rotationsellipsoid logarithmische oder cyclometrische Functionen, in derjenigen für ein dreiaxiges Ellipsoid elliptische Integrale auftreten. Wenn man indessen die Betrachtung auf solche Ellipsoide beschränkt, deren Excentricitäten so klein sind, dass man alle Potenzen derselben von der vierten an ausser Acht lassen darf, so kann man, wie im Folgenden gezeigt werden soll, zu ganz einfachen angenäherten Formeln gelangen, die eine leichte Behandlung vieler Aufgaben gestatten, was darum von besonderem Interesse zu sein scheint, weil die ellipsoidische Gestalt der Himmelskörper soweit bekannt in der That stets eine nur wenig von der Kugelform abweichende ist. Es sollen daher im ersten Theile dieser Abhandlung zuerst jene Näherungsformeln für das innere und äussere Potential eines homogenen Ellipsoides mit kleinen Excentricitäten entwickelt werden, woraus sich dann weiter ergeben wird, wie man bei gleicher Annäherung eine klare Uebersicht über den Verlauf der jenem Potentiale zugeordneten

Niveauflächen und Kraftlinien gewinnen kann. In der zweiten Abtheilung werden wir die Untersuchung ausdehnen auf nicht homogene Ellipsoide, wobei wir nur die Einschränkung machen werden, dass die Flächen, nach denen die Dichtigkeit sich ändert, sämmtlich Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten und gleichgerichteten Axen sein müssen; auch in diesem Falle werden sich Resultate ergeben, welche den im ersten Theile gefundenen ganz analog sind. Von den aufgestellten Formeln werden wir dann mehrere Anwendungen machen auf die Bestimmung der Gleichgewichtsfiguren einer Flüssigkeit, welche bloss der Einwirkung von Anziehungskräften ausgesetzt ist. Wir werden zu dem Resultate gelangen, dass jedesmal, wenn eine oder mehrere Flüssigkeitsschichten über einem ellipsoidischen festen Körper der betrachteten Art ausgebreitet und nur ihrer eigenen, sowie der von dem festen Kerne ausgehenden Anziehung unterworfen sind, sowohl in dem Falle, wo das System ruht, als wo es um eine seiner Axen mit einer kleinen Winkelgeschwindigkeit rotirt, eine Gleichgewichtsfigur möglich ist, bei welcher die freie Oberfläche und alle Trennungsflächen der einzelnen Flüssigkeitsschichten bei Vernachlässigung der vierten Potenzen der Excentricitäten als mit gewissen Ellipsoiden von gleichen Axenrichtungen zusammenfallend angesehen werden können.

Im letzten Theile werden wir endlich von den Anwendungen handeln, die sich von den gefundenen Resultaten auf die Theorie der Gestalt der Erde machen lassen. Es wurden bekanntlich die Untersuchungen über diesen Gegenstand gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts durch Clairaut angeregt, vollendet besonders durch Legendre und Laplace, welcher letztere speciell für diese Lehre seine Theorie der Kugelfunctionen aufstellte. Die Voraussetzung, von welcher die mathematischen Entwicklungen über diesen Gegenstand ihren Ausgang nehmen, ist bekanntlich die, dass die Erde sich anfänglich in einem flüssigen Zustande befunden habe und die Gestalt, welche sie damals angenommen, die also den Bedingungen des hydrostatischen Gleichgewichtes genügen muss, auch jetzt noch besitze, selbstverständlich dabei abgesehen von den in spätern Entwicklungsperioden

eingetretenen localen Veränderungen ihrer Oberfläche. Die Laplace'sche Theorie gibt mittelst der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen die vollständige Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen für eine nicht homogene, mit kleiner Winkelgeschwindigkeit um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Axe rotirende Flüssigkeitsmasse, deren Dichtigkeit sich in beliebiger Weise ändert, wofern nur die Flächen gleicher Dichtigkeit von der Kugelgestalt wenig abweichen, und auf die ausser ihrer eigenen Anziehung noch diejenige beliebiger äusserer Massen einwirkt, dabei unterstellt, dass letztere gegen die erstere klein ist. Für den Fall, dass keine äusseren Massen anziehend wirken, findet sich, dass sowohl die freie Oberfläche als sämtliche Flächen gleicher Dichtigkeit Rotationsellipsoide werden müssen; es tritt dieser Fall aber mit Ausnahme des Saturn, dessen Gestalt durch die ihn umgebenden Ringe wegen deren Nähe vielleicht erheblich beeinflusst sein kann, für alle andern Planeten unseres Sonnensystems ein, indem bei diesen durch die Anziehung der äussern Massen nur im Verhältniss zu ihren Dimensionen verschwindende Störungen ihrer Oberfläche hervorgerufen werden können (wie z. B. die Ebbe und Fluth auf der Erde). Dass die erwähnte Anordnung der flüssigen Masse eine mögliche Gleichgewichtsfigur derselben ist, folgt nun auch sofort aus den von uns im zweiten Abschnitte gewonnenen Resultaten, und wir werden zeigen, wie die wichtigsten Ergebnisse der in Rede stehenden Theorie, so z. B. der schon von Clairaut entdeckte Zusammenhang zwischen der Abplattung der Erde und der Aenderung der Schwere an ihrer Oberfläche, sich auch aus den von uns im ersten und zweiten Abschnitte aufgestellten Formeln, in ganz anderer und vielleicht einfacherer Weise wie bei Laplace, ableiten lassen.

I. Entwicklungen über das Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides.

§. 1. Reihenentwicklung für das innere Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides mit kleinen Excentricitäten.

Es mögen a, b, c die Halbaxen eines dreiaxigen Ellipsoides bezeichnen, dabei $a > b > c$ angenommen; e und ε seien die linearen, κ und λ die numerischen Excentricitäten desselben, definirt durch die Gleichungen:

$$a^2 - c^2 = e^2, \quad b^2 - c^2 = \varepsilon^2, \quad \frac{e}{c} = \kappa, \quad \frac{\varepsilon}{c} = \lambda.$$

Den Coordinatenanfangspunkt legen wir in den Mittelpunkt des Ellipsoides, die Axen der x, y, z seien resp. nach den Axen $2a, 2b, 2c$ des Ellipsoides orientirt. Die constante Dichtigkeit des Ellipsoides werde mit ρ bezeichnet. Das Potential V desselben für den innern Punkt (x, y, z) können wir dann durch folgende Formel darstellen*):

$$V = abc\rho\pi \{ D - Ax^2 - By^2 - Cz^2 \},$$

wobei zu setzen ist:

$$D = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}, \quad A = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)^3(b^2+t)(c^2+t)}},$$

$$B = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)^3(c^2+t)}}, \quad C = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)^3}}.$$

Zur Umformung dieser Integrale machen wir die Substitution:

*) S. die Abhandlung von Lejeune-Dirichlet: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abhandlungen der Berl. Academie v. Jahre 1839.

$$\frac{c^2}{c^2 + t} = s^2,$$

woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

$$t = \frac{c^2}{s^2} - c^2, \quad dt = -\frac{2c^2 ds}{s^3}, \quad \frac{dt}{\sqrt{c^2 + t}} = -\frac{2c ds}{s^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + t}} = \frac{s}{c\sqrt{1 + \kappa^2 s^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{b^2 + t}} = \frac{s}{c\sqrt{1 + \lambda^2 s^2}}.$$

Da den frühern Integrationsgrenzen 0 und ∞ die neuen 1 und 0 entsprechen, so erhält man jetzt folgende Werthe für die Coefficienten A, B, C, D:

$$D = \frac{2}{c} \int_0^1 (1 + \kappa^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + \lambda^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

$$A = \frac{2}{c^3} \int_0^1 (1 + \kappa^2 s^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \lambda^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} s^2 ds,$$

$$B = \frac{2}{c^3} \int_0^1 (1 + \kappa^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + \lambda^2 s^2)^{-\frac{3}{2}} s^2 ds,$$

$$C = \frac{2}{c^3} \int_0^1 (1 + \kappa^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + \lambda^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} s^2 ds.$$

Wenn wir jetzt die einzelnen Factoren der Integranden in Reihen entwickeln, erhalten wir weiter:

$$D = \frac{2}{c} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \kappa^2 s^2 + \frac{3}{8} \kappa^4 s^4 - \frac{5}{16} \kappa^6 s^6 + \dots\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 s^2 + \frac{3}{8} \lambda^4 s^4 - \frac{5}{16} \lambda^6 s^6 + \dots\right) ds,$$

$$A = \frac{2}{c^3} \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2} \kappa^2 s^2 + \frac{15}{8} \kappa^4 s^4 - \frac{35}{16} \kappa^6 s^6 + \dots\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 s^2 + \frac{3}{8} \lambda^4 s^4 - \frac{5}{16} \lambda^6 s^6 + \dots\right) s^2 ds,$$

$$B = \frac{2}{c^3} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \kappa^2 s^2 + \frac{3}{8} \kappa^4 s^4 - \frac{5}{16} \kappa^6 s^6 + \dots\right)$$

$$\left(1 - \frac{3}{2} \lambda^2 s^2 + \frac{15}{8} \lambda^4 s^4 - \frac{35}{16} \lambda^6 s^6 + \dots\right) s^2 ds,$$

$$C = \frac{2}{c^3} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \kappa^2 s^2 + \frac{3}{8} \kappa^4 s^4 - \frac{5}{16} \kappa^6 s^6 + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 s^2 + \frac{3}{8} \lambda^4 s^4 - \frac{5}{16} \lambda^6 s^6 + \dots \right) s^2 ds.$$

Führen wir die angedeuteten Multiplicationen und Integrationen in diesen Formeln aus, so erhalten wir endlich:

$$D = \frac{2}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (\kappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{40} (3\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + 3\lambda^4) - \frac{1}{112} (5\kappa^6 + 3\kappa^4\lambda^2 + 3\kappa^2\lambda^4 + 5\lambda^6) + \dots \right\},$$

$$A = \frac{2}{c^3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{10} (3\kappa^2 + \lambda^2) + \frac{3}{56} (5\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + \lambda^4) - \frac{1}{144} (35\kappa^6 + 15\kappa^4\lambda^2 + 9\kappa^2\lambda^4 + 5\lambda^6) + \dots \right\},$$

$$B = \frac{2}{c^3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{10} (\kappa^2 + 3\lambda^2) + \frac{3}{56} (\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + 5\lambda^4) - \frac{1}{144} (5\kappa^6 + 9\kappa^4\lambda^2 + 15\kappa^2\lambda^4 + 35\lambda^6) + \dots \right\},$$

$$C = \frac{2}{c^3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{10} (\kappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{56} (3\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + 3\lambda^4) - \frac{1}{144} (5\kappa^6 + 3\kappa^4\lambda^2 + 3\kappa^2\lambda^4 + 5\lambda^6) + \dots \right\}.$$

Durch diese Formeln sind die Coefficienten des Ausdruckes für das Potential in vollständig entwickelter Form gegeben. Berücksichtigt man nur die Quadrate der Excentricitäten, so kann man, unter r den Radiusvector des Punktes (x, y, z) verstanden, für das innere Potential des gegebenen Ellipsoi- des folgende einfache Formel aufstellen:

$$1) \quad V = 2ab\varrho\pi \left\{ 1 - \frac{1}{6} (\kappa^2 + \lambda^2) - \frac{r^2}{c^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{10} (\kappa^2 + \lambda^2) \right] + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{c^2} (\kappa^2 x^2 + \lambda^2 y^2) \right\}.$$

Bis auf die vierte Potenz der Excentricitäten entwickelt, hat man dagegen für das Potential:

$$2) \quad V = 2ab\varrho\pi \left\{ 1 - \frac{1}{6}(\kappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{40}(3\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + 3\lambda^4) \right. \\ \left. - \frac{r^2}{c^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(\kappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{56}(3\kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + 3\lambda^4) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{c^2}(\kappa^2 x^2 + \lambda^2 y^2) - \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{c^4} \left[(3\kappa^4 + \kappa^2\lambda^2)x^2 + (3\lambda^4 + \kappa^2\lambda^2)y^2 \right] \right\}.$$

§. 2. Bestimmung der Axen des durch einen gegebenen Punkt gehenden Ellipsoides, welches einem gegebenen dreiaxigen Ellipsoide confocal ist.

Um das äussere Potential des gegebenen dreiaxigen Ellipsoides entwickeln zu können, müssen wir zuerst die Axen desjenigen Ellipsoides bestimmen, welches dem gegebenen confocal ist und durch den gegebenen äusseren Punkt (x, y, z) geht. Die den x -, y -, z -Coordinationen parallelen Halbachsen des confocalen Ellipsoides mögen resp. mit α, β, γ bezeichnet werden, während für das ursprünglich gegebene Ellipsoid die frühern Bezeichnungen auch jetzt noch gelten sollen. Man hat jetzt folgende Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = a^2 - c^2 = e^2, \quad \beta^2 - \gamma^2 = b^2 - c^2 = \varepsilon^2.$$

Zur Bestimmung von γ erhält man hieraus:

$$\frac{x^2}{\gamma^2 + e^2} + \frac{y^2}{\gamma^2 + \varepsilon^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Schafft man die Nenner fort und führt wieder den Radiusvector r des Punktes (x, y, z) ein, so kann man die vorhergehende Gleichung folgendermassen schreiben:

$$3) \quad \gamma^6 - (r^2 - e^2 - \varepsilon^2)\gamma^4 - [\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2 - e^2 \varepsilon^2]\gamma^2 - e^2 \varepsilon^2 z^2 = 0.$$

Um den durch diese Gleichung bestimmten Werth von γ^2 in eine nach den Potenzen der Excentricitäten e und ε fortschreitende Reihe zu entwickeln, können wir etwa in folgender Weise verfahren. Um zunächst γ^2 bis auf die Quadrate der Excentricitäten zu entwickeln, dürfen wir aus obiger Gleichung das Produkt $e^2 \varepsilon^2$ weglassen; nach Division mit γ^2 verwandelt dieselbe sich dann in eine quadratische,

die, wenn wir zur Unterscheidung den bis auf die Glieder der 2. Dimension entwickelten Werth von γ mit γ' bezeichnen, folgendermassen lautet:

$$\gamma'^4 - (r^2 - e^2 - \varepsilon^2)\gamma'^2 - [\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2] = 0.$$

Hieraus folgt, da nur das positive Vorzeichen der Wurzel brauchbar ist:

$$\gamma'^2 = \frac{1}{2}(r^2 - e^2 - \varepsilon^2) + \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2 + \frac{1}{4}(r^2 - e^2 - \varepsilon^2)^2},$$

wofür wir bei gleicher Annäherung auch setzen können:

$$\gamma'^2 = \frac{1}{2}(r^2 - e^2 - \varepsilon^2) + \frac{1}{2}\sqrt{r^4 - 2r^2(e^2 + \varepsilon^2) + 4[\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2]}.$$

Entwickelt man nun die hier auftretende Quadratwurzel in eine Reihe, so erhält man bei Vernachlässigung aller Glieder, welche die zweite Dimension übersteigen:

$$\begin{aligned} \gamma'^2 &= \frac{1}{2}(r^2 - e^2 - \varepsilon^2) + \frac{1}{2}r^2 \left\{ 1 - \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^2} + \frac{2[\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2]}{r^4} \dots \right\} \\ &= r^2 - e^2 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2)z^2}{r^2} \\ &= r^2 - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Hierdurch ist γ^2 bis auf die Glieder der 2. Dimension gefunden. Bezeichnen wir weiter den bis auf die Glieder der 4. Ordnung entwickelten Werth von γ mit γ'' und setzen:

$$\gamma''^2 = \gamma'^2 + \Delta,$$

wo jetzt Δ von der 4. Dimension ist. Vorstehenden Ausdruck setzen wir nun für γ^2 in die Gleichung (3), behalten aber bei der Entwicklung der Potenzen von $\gamma'^2 + \Delta$ bloss die Glieder bei, welche nach Δ von der 1. Ordnung sind. Bekanntlich hat man dann, wenn die Function der Gleichung (3) zur Abkürzung mit f bezeichnet wird:

$$\Delta = -\frac{f(\gamma'^2)}{f'(\gamma'^2)}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes muss, wie aus dem Obigen folgt und die wirkliche Ausrechnung bestätigt, von der 4. Ordnung sein, indem die Glieder niederer Ordnungen sich gegenseitig aufheben; die Glieder der 4. Ordnung bilden folgendes Aggregat:

$$\frac{3(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)^2}{r^2} - \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)^2}{r^2} - 2(e^2 + \varepsilon^2)(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2) + e^2 \varepsilon^2 r^2$$

$$+ [\varepsilon^2 x^2 + e^2 y^2 + (e^2 + \varepsilon^2) z^2] \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^2} - e^2 \varepsilon^2 z^2,$$

oder bei gehöriger Vereinfachung:

$$\frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)^2}{r^2} - e^4 x^2 - \varepsilon^4 y^2.$$

In dem Nenner $f(\gamma'^2)$ des obigen Ausdruckes für die Correction Δ braucht man bloss das Anfangsglied r^4 , welches die Excentricitäten nicht enthält, zu berücksichtigen; dadurch erhält man:

$$\Delta = \frac{e^4 x^2 + \varepsilon^4 y^2}{r^4} - \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)^2}{r^6}.$$

Hiernach nimmt der Ausdruck von γ^2 , bis auf die Glieder der 4. Ordnung entwickelt, folgende Gestalt an:

$$4) \quad \gamma^2 = r^2 - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^2} + \frac{e^4 x^2 + \varepsilon^4 y^2}{r^4} - \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)^2}{r^6} + \dots$$

In ganz ähnlicher Weise, wie vorhin die Glieder der 4. Ordnung gefunden wurden, könnte man auch zu den Gliedern der folgenden Ordnungen fortschreiten.

§. 3. Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides in einem äussern Punkte.

Auf Grund der vorher gefundenen Formel (4) können wir nun zur Entwicklung des Potentials V des gegebenen Ellipsoides in dem äusseren Punkte (x, y, z) schreiten. Nach dem Maclaurin'schen Satze hat man nämlich, unter V' das Potential des durch den gegebenen Punkt gehenden, mit dem gegebenen confocalen Ellipsoides in demselben Punkte verstanden:

$$V : V' = abc : \alpha\beta\gamma,$$

dabei vorausgesetzt, dass auch das confocale Ellipsoid mit Masse von der Dichtigkeit ρ erfüllt sei. Das Potential V' ergibt sich aus den Formeln des §. 1, in welchen statt c, κ, λ resp. $\gamma, \frac{e}{\gamma}, \frac{\varepsilon}{\gamma}$ zu setzen ist.

Um also V bis auf die Glieder der zweiten Dimension entwickelt zu erhalten, setzen wir nach dem Obigen und nach Gleichung (1):

$$V = 2abc\rho\pi \left\{ \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\gamma^3} (e^2 + \varepsilon^2) - \frac{r^2}{\gamma^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\gamma^2} (e^2 + \varepsilon^2) \right] + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\gamma^5} (e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2) \right\},$$

und dabei bestimmt sich γ durch die Gleichung:

$$\gamma^2 = r^2 - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^2}.$$

Hieraus folgt, bei gehöriger Entwicklung bis auf die Glieder der 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2r^5}, \\ \frac{1}{\gamma^3} &= \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^4} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3} + \frac{3(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)}{2r^7}. \end{aligned}$$

Diese Werthe sind in der obigen Formel für das Potential V in den Gliedern einzusetzen, welche die Excentricitäten nicht enthalten; in den letzteren ist $\frac{1}{\gamma^3}$ und $\frac{1}{\gamma^5}$ einfach durch $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^5}$ zu ersetzen. Dadurch kommt:

$$\begin{aligned} V &= 2abc\rho\pi \left\{ \frac{1}{r} + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2r^5} - \frac{e^2 + \varepsilon^2}{6r^3} - \frac{1}{3r} - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2r^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2 + \varepsilon^2}{10r^3} + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{5r^5} \right\} \\ &= 2abc\rho\pi \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{15} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5} \right\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir endlich noch die Masse $\frac{4}{3}abc\rho\pi$ des Ellipsoides mit M , so können wir die bis auf die Glieder der 2. Ordnung entwickelte Formel für das äussere Potential des gegebenen Ellipsoides folgendermassen schreiben:

$$5) \quad V = M \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5} \right\}.$$

Wollen wir das Potential bis auf die Glieder der vierten Ordnung entwickelt darstellen, so schreiben wir dem Obigen zufolge nach Gleichung (2):

$$V = 2abc\rho\pi \left\{ \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\gamma^3} (e^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{\gamma^5} (3e^4 + 2e^2 \varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \right\}$$

$$-\frac{r^2}{\gamma^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\gamma^2} (e^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{\gamma^4} (3e^4 + 2e^2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \right] \\ + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\gamma^5} (e^2x^2 + \varepsilon^2y^2) - \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{\gamma^7} \left[(3e^4 + e^2\varepsilon^2)x^2 + (3\varepsilon^4 + e^2\varepsilon^2)y^2 \right] \Big\}.$$

In vorstehender Formel haben wir jetzt folgende, aus Gleichung (4) fließende Substitutionen zu machen:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{r^4} + \frac{e^4x^2 + \varepsilon^4y^2}{r^6} - \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^8} + \dots \right]^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{r} + \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{2r^5} - \frac{e^4x^2 + \varepsilon^4y^2}{2r^7} + \frac{7}{8} \cdot \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^9} + \dots, \\ \frac{1}{\gamma^3} = \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{r^4} + \frac{e^4x^2 + \varepsilon^4y^2}{r^6} - \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^8} + \dots \right]^{-\frac{3}{2}} \\ = \frac{1}{r^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{r^7} - \frac{3}{2} \cdot \frac{e^4x^2 + \varepsilon^4y^2}{r^9} + \frac{27}{8} \cdot \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^{11}} + \dots, \\ \frac{1}{\gamma^5} = \frac{1}{r^5} + \frac{5}{2} \cdot \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{r^9} - \dots, \quad \frac{1}{\gamma^7} = \frac{1}{r^7} + \dots$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Formel für das Potential findet man für die Glieder der 4. Ordnung nach einfacher Reduction folgendes Aggregat:

$$2abcq\pi \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^9} - \frac{1}{14} \cdot \frac{(3e^4 + e^2\varepsilon^2)x^2 + (3\varepsilon^4 + e^2\varepsilon^2)y^2}{r^7} \right. \\ \left. + \frac{1}{140} \cdot \frac{3e^4 + 2e^2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{r^5} \right\}.$$

Hiernach endlich nimmt die bis auf die Glieder der 4. Dimension entwickelte Formel für das äussere Potential des gegebenen Ellipsoides folgende Gestalt an:

$$6) \quad V = M \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \left[\frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} - \frac{3(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)}{r^5} \right] \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{70} \cdot \frac{3e^4 + 2e^2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{r^5} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{7} \cdot \frac{(3e^4 + e^2\varepsilon^2)x^2 + (3\varepsilon^4 + e^2\varepsilon^2)y^2}{r^7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^2x^2 + \varepsilon^2y^2)^2}{r^9} \right] + \dots \right\}.$$

Bemerkung. Wenn der angezogene Punkt sehr weit entfernt, der Radiusvector desselben also sehr gross ist, so ist die Anwendbarkeit der Formel (4) offenbar nicht mehr an die Bedingung gebunden, dass die Excentricitäten e und ε sehr kleine Werthe haben müssen. Zudem sind die nu-

merischen Excentricitäten des durch den gegebenen Punkt gehenden confocalen Ellipsoides in diesem Falle stets sehr klein, welches auch die Excentricitäten des gegebenen Ellipsoides sein mögen, so dass jetzt auch die Anwendung der Formeln (1) und (2) auf das confocale Ellipsoid keiner Beschränkung unterliegt. Daraus folgt, dass die in (5) und (6) für das äussere Potential aufgestellten Ausdrücke bei ganz beliebigen Werthen der Excentricitäten des gegebenen Ellipsoides gültig bleiben, wenn der angezogene Punkt sehr weit von dem Ellipsoide entfernt liegt.

Wenn das gegebene Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe in die Axe der z fällt, so werden die behandelten Entwicklungen viel einfacher; die beiden Excentricitäten e und ε sind jetzt einander gleich und man kann bei gehöriger Entwicklung das Potential bis auf die Glieder der 6. Ordnung durch folgende Formel ausdrücken:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{3/2 Me^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{r^2} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{r^2} \left(\frac{1}{35} - \frac{2}{7} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{5}{8} \cdot \frac{e^4}{r^4} \left(\frac{1}{63} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{z^4}{r^4} - \frac{11}{15} \cdot \frac{z^6}{r^6} \right) + \dots \right\}.$$

Die zur vollständigen Ableitung dieser Formel nöthigen Rechnungen mitzutheilen, verstattet hier der Raum nicht.

§. 4. Niveauflächen des Potentials eines homogenen, dreiaxigen Ellipsoides.

1. Die innern Niveauflächen des Potentials eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides sind ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide, deren Gestalt wir unter Voraussetzung kleiner Excentricitäten näher bestimmen wollen. Für die Quadrate der Halbaxen a , b , c der zum Potentialwerthe V gehörigen Niveaufläche hat man unter Beibehaltung der Bezeichnung des §. 1:

$$a^2 = \frac{D - \frac{V}{abcq\pi}}{A}, \quad b^2 = \frac{D - \frac{V}{abcq\pi}}{B}, \quad c^2 = \frac{D - \frac{V}{abcq\pi}}{C}.$$

Demgemäss hat man für die Axenverhältnisse der drei

Hauptschnitte, wenn man sich auf die Quadrate der numerischen Excentricitäten κ und λ beschränkt (§. 1):

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{C}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(\kappa^2 + \lambda^2)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(3\kappa^2 + \lambda^2)}},$$

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{C}{B}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(\kappa^2 + \lambda^2)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(\kappa^2 + 3\lambda^2)}},$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(\kappa^2 + 3\lambda^2)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(3\kappa^2 + \lambda^2)}},$$

oder auch bei gleichem Grade der Annäherung:

$$\frac{a}{c} = 1 + \frac{3}{10}\kappa^2, \quad \frac{b}{c} = 1 + \frac{3}{10}\lambda^2, \quad \frac{a}{b} = 1 + \frac{3}{10}(\kappa^2 - \lambda^2).$$

Für die Abplattung eines jeden der drei Hauptschnitte einer ellipsoidischen Niveaufläche hat man daher:

$$\frac{a-c}{c} = \frac{3}{10}\kappa^2, \quad \frac{b-c}{c} = \frac{3}{10}\lambda^2, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{3}{10}(\kappa^2 - \lambda^2).$$

Die Abplattungen der drei Hauptschnitte des gegebenen Ellipsoides sind dagegen:

$$\frac{a-c}{c} = \frac{1}{2}\kappa^2, \quad \frac{b-c}{c} = \frac{1}{2}\lambda^2, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{1}{2}(\kappa^2 - \lambda^2).$$

Hiernach können wir die innern Niveauflächen definiren als ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide, in denen (bei Vernachlässigung der vierten Potenz der Excentricitäten) die Abplattung jedes Hauptschnittes drei Fünftel der Abplattung des entsprechenden Hauptschnittes des gegebenen Ellipsoides ist.

2. Auch die Natur der äussern Niveauflächen lässt sich leicht näher bestimmen, wenn man sich auf die Quadrate der Excentricitäten beschränkt. Zu dem Ende führen wir die Winkel μ und ν ein, welche der Radiusvector mit den Axen der x und y bildet, setzen also:

$$x = r \cos \mu, \quad y = r \cos \nu.$$

Dadurch geht die in (5) für das Potential aufgestellte Formel in die folgende über:

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2 \cos^2 \mu + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}{r^3}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\frac{1}{r}$ von $\frac{V}{M}$ sich nur um

Grössen unterscheiden könne, welche von derselben Ordnung sind, wie das Quadrat der Excentricitäten. Setzen wir daher:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{M} + h,$$

so erhalten wir nach Substitution dieses Ausdruckes in die vorige Gleichung und bei Vernachlässigung aller Glieder, die von höherer Ordnung sind wie die Quadrate der Excentricitäten, zur Bestimmung von h folgende Gleichung:

$$0 = h - \frac{1}{10} \left(\frac{V}{M} \right)^3 (e^2 + \varepsilon^2) + \frac{3}{10} \left(\frac{V}{M} \right)^3 (e^2 \cos^2 \mu + \varepsilon^2 \cos^2 \nu).$$

Setzen wir den hieraus für h folgenden Werth in die oben für $\frac{1}{r}$ angenommene Gleichung ein, so können wir die Gleichung der äusseren Niveauflächen in folgender Weise schreiben:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{M} + \frac{1}{10} \left(\frac{V}{M} \right)^3 (e^2 + \varepsilon^2) - \frac{3}{10} \left(\frac{V}{M} \right)^3 (e^2 \cos^2 \mu + \varepsilon^2 \cos^2 \nu).$$

Behufs einfacher geometrischer Interpretation ersetzen wir vorstehende Gleichung durch die folgende, durch Quadrirung jener erhaltene, die denselben Grad von Genauigkeit bietet:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (e^2 + \varepsilon^2) - \frac{3}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (e^2 \cos^2 \mu + \varepsilon^2 \cos^2 \nu).$$

Wir denken uns nun ein Ellipsoid mit den in die Coordinatenachsen fallenden Halbaxen a, b, c und drücken seine Gleichung in den Coordinaten r, μ, ν aus; diese wird:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cos^2 \mu + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cos^2 \nu.$$

Vergleichen wir diese Formel mit der letzten Gleichung der Niveauflächen, so sehen wir, dass diese bis auf Grössen der vierten Dimension mit Ellipsoiden zusammenfallen, für deren Axen $2a, 2b, 2c$ man folgende Gleichungen hat:

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (e^2 + \varepsilon^2),$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} e^2 \left(\frac{V}{M} \right)^4, \quad \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} \varepsilon^2 \left(\frac{V}{M} \right)^4.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (\varepsilon^2 - 2e^2), \quad \frac{1}{b^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (e^2 - 2\varepsilon^2),$$

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{V}{M} \right)^4 (e^2 + \varepsilon^2).$$

Bei gleicher Annäherung kann man statt vorstehender Gleichungen auch schreiben:

$$a^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5}(\varepsilon^2 - 2e^2), \quad b^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5}(e^2 - 2\varepsilon^2),$$

$$c^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5}(e^2 + \varepsilon^2).$$

Hierdurch sind die Axen der ellipsoidischen Fläche, welche wir der zum Potentialwerthe V gehörigen Niveaufläche substituiren können, in der einfachsten Weise bestimmt. Es ergibt sich ferner noch:

$$a^2 - c^2 = \frac{3}{5}e^2, \quad b^2 - c^2 = \frac{3}{5}\varepsilon^2,$$

woraus folgt, dass für alle äussern Niveauflächen die entsprechenden Excentricitäten gleich, jene also confocal sind. Wir können hiernach folgenden Satz aufstellen: Bei Vernachlässigung von Grössen, welche von gleicher Ordnung sind wie die vierten Potenzen der Excentricitäten, kann man die äussern Niveauflächen des Potentials eines dreiaxigen homogenen Ellipsoides ersetzen durch das System der confocalen Ellipsoide, deren Excentricitätsquadrate drei Fünftel der entsprechenden Excentricitätsquadrate des gegebenen Ellipsoides sind. Bei beliebig grossen Werthen der Excentricitäten können zwar die Niveauflächen, welche dem gegebenen Ellipsoide nahe liegen, beträchtlicher von dem vorstehenden Gesetze abweichen; mit wachsender Entfernung schliessen sie sich dagegen nach der betreffenden Bemerkung in §. 3 immer enger an die im Vorhergehenden näher definirten Ellipsoide an.

Bei Rotationsellipsoiden werden die Niveauflächen natürlich wieder Rotationsflächen mit derselben Rotationsaxe; in diesem Falle ist es auch ohne besondere Schwierigkeit möglich, die Gleichung der äussern Niveauflächen vollständiger zu entwickeln. Bezeichnet man nämlich $\frac{z}{r}$ mit $\sin \varphi$, wo also φ den Winkel des Radiusvector mit der Aequato-

rial-Ebene bedeutet, so erhält man durch Umkehrung der letzten Formel in §. 3:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = \frac{V}{M} - \frac{3e^2}{10} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left(\frac{V}{M} \right)^3 - \frac{3e^4}{100} \left(\frac{1}{14} - 4 \frac{5}{7} \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + 3 \frac{1}{2} \sin^4 \varphi \right) \left(\frac{V}{M} \right)^5 - \frac{e^6}{2000} \left(2 \frac{1}{3} - 172 \frac{3}{7} \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + 380 \frac{1}{7} \sin^4 \varphi - 223 \sin^6 \varphi \right) \left(\frac{V}{M} \right)^7 - \dots \end{aligned}$$

Die vollständige Ableitung dieser Formel müssen wir übergehen.

§. 5. Kraftlinien des Potentials eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides.

Die Gleichungen der Kraftlinien, d. h. derjenigen Curven, welche in jedem Punkte von der Richtung der von dem Ellipsoide ausgeübten Anziehung tangirt werden, ergeben sich aus folgender, für dieselben geltender Beziehung:

$$dx : dy : dz = \frac{dV}{dx} : \frac{dV}{dy} : \frac{dV}{dz}.$$

Daher findet man als Differentialgleichungen der drei Projectionen der innerhalb des Ellipsoides gelegenen Theile der Kraftlinien auf die Coordinaten-Ebenen:

$dz : dx = Cz : Ax$, $dz : dy = Cz : By$, $dy : dx = By : Ax$, wo die Coefficienten A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie in §. 1. Schreibt man vorstehende Gleichungen folgendermassen:

$$\frac{dz}{z} = \frac{C}{A} \cdot \frac{dx}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{C}{B} \cdot \frac{dy}{y}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{B}{A} \cdot \frac{dx}{x},$$

so erhält man sogleich durch Integration:

$$\log z = \frac{C}{A} \log x + \text{Const}, \quad \log z = \frac{C}{B} \log y + \text{Const},$$

$$\log y = \frac{B}{A} \log x + \text{Const},$$

oder auch:

$$z = \mathfrak{C} x^{\frac{C}{A}}, \quad z = \mathfrak{C}' y^{\frac{C}{B}}, \quad y = \mathfrak{C}'' x^{\frac{B}{A}},$$

wo $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ drei Constanten bedeuten. Setzt man für

A, B, C die in §. 1 angegebenen Werthe, so hat man bei Beschränkung auf das Quadrat der Excentricitäten:

$$z = \mathfrak{C} x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(x^2 + \lambda^2)}, \quad z = \mathfrak{C}' y^{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(x^2 + 3\lambda^2)},$$

$$y = \mathfrak{C}'' x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{10}(3x^2 + \lambda^2)}.$$

Bei gehöriger Vereinfachung und derselben Annäherung kann man daher endlich die Gleichungen der inneren Kraftlinien folgendermassen schreiben:

$$z = \mathfrak{C} x^{1 + \frac{3}{5}x^2}, \quad z = \mathfrak{C}' y^{1 + \frac{3}{5}\lambda^2}, \quad y = \mathfrak{C}'' x^{1 + \frac{3}{5}(x^2 - \lambda^2)}.$$

Die Constanten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ lassen sich bestimmen, wenn man ausdrückt, dass die Curve durch einen gegebenen Punkt geht.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt, dass die innern Theile der Kraftlinien vom Mittelpunkte strahlenförmig auslaufende parabolische Curven sind, welche sich geraden Linien desto mehr nähern, je kleiner die Excentricitäten des gegebenen Ellipsoides sind. Diejenigen Kraftlinien, welche durch irgend einen Punkt einer Hauptebene des gegebenen Ellipsoides gehen, fallen ganz in diese Hauptebene, da dann zwei der Constanten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ verschwinden müssen, sind also ebene Curven; alle andern Kraftlinien sind, wie man dieses leicht verificiren kann, Curven von doppelter Krümmung. Bei einem Rotationsellipsoide sind alle Kraftlinien ebene Curven, und man findet leicht, dass dieselben der Aequatorial-Ebene ihre concave oder convexe Seite zukehren, je nachdem das gegebene Ellipsoid verlängert oder abgeplattet ist.

Die nähere Bestimmung der ausserhalb des gegebenen Ellipsoides gelegenen Theile der Kraftlinien ergibt sich sogleich nach dem Obigen und nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie. Da nämlich nach dem Frühern die äussern Niveauflächen bis auf Grössen vierter Ordnung mit den confocalen Ellipsoiden zusammenfallen, deren Excentricitätsquadrate drei Fünftel von denen des gegebenen Ellipsoides sind, so folgt, dass die äussern Kraftlinien in gleicher Annäherung mit den Durchschnittscurven der

confocalen ein- und zweifächerigen Hyperboloide zusammenfallen, für welche die Excentricitätsquadrate wieder drei Fünftel der entsprechenden Excentricitätsquadrate des gegebenen Ellipsoides sind; denn diese zwei Schaaren von Flächen bilden mit den für die Niveauflächen gesetzten confocalen Ellipsoiden bekanntlich ein System von Orthogonalflächen.

Auch bei grössern Werthen der Excentricitäten gilt das Gesagte für diejenigen Theile der äussern Kraftlinien, welche von dem gegebenen Ellipsoide weit entfernt sind

Für Rotationsellipsoide sind auch die äussern Kraftlinien ebene Curven und zwar confocale Hyperbeln, welche der Aequatorial-Ebene ihre concave oder convexe Seite zuwenden, je nachdem das Ellipsoid abgeplattet oder verlängert ist. In den Punkten der Oberfläche schliesst sich der innere parabolische Theil einer Kraftlinie so an den äussern hyperbolischen Theil an, dass beide eine gemeinschaftliche Tangente haben; die Krümmung beider Theile ist aber entgegengesetzt.

§. 6. Anwendungen der vorhergehenden Ergebnisse.

1. Bestimmung der Wirkung eines weit entfernten anziehenden Punktes auf ein dreiachsiges Ellipsoid.

Die Halbaxen eines Ellipsoides seien wie bisher a, b, c ; auch die Coordinatenachsen sowie die sonstigen Bezeichnungen sollen dieselben bleiben, wie im Vorhergehenden. Ein das Ellipsoid anziehender Punkt, dessen Masse m sei, habe die Coordinaten x, y, z ; f bedeute die Elementarattraction. Die Componenten X, Y, Z der Kraft, mit welcher der Punkt auf das Ellipsoid einwirkt, sind entgegengesetzt gleich den Componenten derjenigen Kraft, mit welcher das Ellipsoid den Punkt anzieht; man hat also:

$$X = -mf \frac{dV}{dx}, \quad Y = -mf \frac{dV}{dy}, \quad Z = -mf \frac{dV}{dz},$$

unter V das Potential des Ellipsoides in dem anziehenden

Punkte verstanden, welches sich dem Früheren gemäss durch folgende Gleichung bestimmt:

$$V = \frac{M}{r} - \frac{1}{10}M \left(\frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} - 3 \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5} \right).$$

Die Richtung der in Rede stehenden Kraft geht durch den anziehenden Punkt (x, y, z) . Wir können dieselbe ersetzen durch eine gleiche, im Mittelpunkte des Ellipsoides angreifende Kraft und ein Gegenpaar, welches letztere wir bestimmen wollen.

Die dem ersten Theile $\frac{M}{r}$ des Potentials entsprechende

Kraft geht durch den Mittelpunkt des Ellipsoides, ist also ohne Einfluss auf das zu bestimmende Paar. Setzen wir daher:

$$V' = -\frac{1}{10}M \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10}M \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5},$$

$$X' = -mf \frac{dV'}{dx}, \quad Y' = -mf \frac{dV'}{dy}, \quad Z' = -mf \frac{dV'}{dz},$$

so sind die in den Coordinatenebenen wirkenden Componenten des Kräftepaares, welches das Ellipsoid um seinen Mittelpunkt zu drehen sucht, folgende:

$$\Xi = Z'y - Y'z, \quad H = X'z - Z'x, \quad Z = Y'x - X'y.$$

Man findet nun durch Differentiation des Ausdruckes für V' :

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{3}{10}M \frac{(3e^2 + \varepsilon^2)x}{r^5} - \frac{3}{2}M \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)x}{r^7},$$

$$\frac{dV'}{dy} = \frac{3}{10}M \frac{(e^2 + 3\varepsilon^2)y}{r^5} - \frac{3}{2}M \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)y}{r^7},$$

$$\frac{dV'}{dz} = \frac{3}{10}M \frac{(e^2 + \varepsilon^2)z}{r^5} - \frac{3}{2}M \frac{(e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2)z}{r^7}.$$

Daraus ergeben sich folgende Werthe für die Componenten des gesuchten Gegenpaares:

$$\Xi = \frac{3}{5}Mmf\varepsilon^2 \cdot \frac{yz}{r^5}, \quad H = -\frac{3}{5}Mmf e^2 \cdot \frac{xz}{r^5},$$

$$Z = \frac{3}{5}Mmf(e^2 - \varepsilon^2) \cdot \frac{xy}{r^5}.$$

Der Anblick dieser Formeln zeigt, dass zwei Componenten des Gegenpaares verschwinden, wenn der anziehende Punkt in einer Hauptebene des Ellipsoides liegt; es bleibt

dann nur noch die in dieser Hauptebene liegende Componente. Fällt der anziehende Punkt in eine der Axen des Ellipsoides, so verschwinden alle drei Componenten des Paares, das Ellipsoid ist also, wenn sein Mittelpunkt befestigt wird, im Gleichgewicht; stabil ist dieses Gleichgewicht indess nur dann, wenn die längste Axe durch den anziehenden Punkt geht.

Bei einem Rotationsellipsoide liegt das Paar in der Ebene, welche durch die Axe des Ellipsoides und den anziehenden Punkt geht; nehmen wir diese zur zx -Ebene, so ist der Werth des Paares

$$-\frac{3}{5}Mmfe^2 \cdot \frac{xz}{r^5} = -\frac{3}{5}Mmfe^2 \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^3},$$

unter φ die Neigung des Radiusvector r gegen die Aequatorial-Ebene verstanden. Natürlich ist $e^2 = a^2 - c^2$, wenn a den Aequatorialhalbmesser und c den Polarhalbmesser bezeichnet, und das Paar wird als positiv gerechnet, wenn es eine Drehung von der z -Axe nach der x -Axe zu bewirken strebt. Hiernach sucht ein abgeplattetes Ellipsoid sich so zu stellen, dass seine Aequatorial-Ebene, ein verlängertes dagegen so, dass seine Rotationsaxe durch den anziehenden Punkt geht.

Die obige Formel gibt sofort den Ausdruck für das von dem Monde (und der Sonne) an dem Erdellipsoide hervorgerufene Gegenpaar, welches die Erscheinungen der Präcession und der Nutation hervorruft.

Noch mag daran erinnert werden, dass gemäss der Bemerkung in §. 3 die obigen Formeln für beliebige Werthe der Excentricitäten gelten, wenn die Entfernung des Punktes gross ist; für dem Ellipsoide nahe liegende Punkte gelten sie nur bei kleinen Excentricitäten.

2. Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit, die der Anziehung eines dreiaxigen Ellipsoides unterliegt.

Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit, auf welche einzig die Anziehung eines Ellipsoides wirkt, muss mit einer der Niveaulächen seines Potentials zusammenfallen. Sind demnach die Excentricitäten des Ellipsoides klein, so muss bis

auf Grössen, welche nach den Excentricitäten von der 4. Dimension sind, die freie Oberfläche die Gestalt eines Ellipsoides zeigen, dessen Excentricitätsquadrate drei Fünftel der Excentricitätsquadrate des gegebenen Ellipsoides sind. Ist V der Potentialwerth in der Flüssigkeits-Oberfläche, so bestimmen sich nach §. 4 die Halbaxen a, b, c derselben durch folgende Gleichungen, in welchen für das anziehende Ellipsoid die frühern Bezeichnungen gelten:

$$a^2 = \left(\frac{M}{V}\right)^2 - \frac{1}{5}(\varepsilon^2 - 2e^2), \quad b^2 = \left(\frac{M}{V}\right)^2 - \frac{1}{5}(e^2 - 2\varepsilon^2),$$

$$c^2 = \left(\frac{M}{V}\right)^2 - \frac{1}{5}(e^2 + \varepsilon^2).$$

Hieraus ergibt sich für das von der Flüssigkeits-Oberfläche eingeschlossene Volumen:

$$\frac{4}{3}abc\pi =$$

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{M}{V}\right)^3 \left[1 - \frac{1}{10}(\varepsilon^2 - 2e^2)\left(\frac{V}{M}\right)^2\right]$$

$$\left[1 - \frac{1}{10}(e^2 - 2\varepsilon^2)\left(\frac{V}{M}\right)^2\right] \left[1 - \frac{1}{10}(e^2 + \varepsilon^2)\left(\frac{V}{M}\right)^2\right],$$

oder wieder mit Vernachlässigung der Grössen 4. Ordnung:

$$\frac{4}{3}abc\pi = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{M}{V}\right)^3,$$

da bei der Ausrechnung des obigen Productes die Glieder, welche die Quadrate der Excentricitäten enthalten, sich gegenseitig aufheben. Bezeichnet daher E das Volumen des anziehenden Ellipsoides, F dasjenige der Flüssigkeit, so hat man:

$$E + F = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{M}{V}\right)^3, \quad \frac{M}{V} = \sqrt[3]{\frac{E + F}{\frac{4}{3}\pi}}.$$

Aus diesem Werthe für $\frac{M}{V}$ in der freien Oberfläche der Flüssigkeit lassen sich nach dem Obigen die Axen derselben sofort angeben. Auch ersieht man aus dem Vorhergehenden die geometrische Bedeutung von $\frac{M}{V}$; es kommt dieser Quotient nämlich dem Radius der Kugel gleich, die mit der entsprechenden Niveaufäche gleiches Volumen hat.

Berücksichtigen wir noch speciell mit einigen Worten den Fall des Rotationsellipsoides. Da die Ellipsoide, welche wir für die äussern Niveauflächen substituiren, der Kugelgestalt näher kommen wie das gegebene Ellipsoid, so liegen die ersten derselben nur zum Theil ausserhalb des ellipsoidischen Kernes, die folgenden dagegen umschliessen denselben ganz. Daraus folgt, dass eine kleine Flüssigkeitsmasse sich bei einem abgeplatteten Ellipsoide ganz an den Polen, bei einem verlängerten ganz am Aequator ansammeln muss; bei einem gewissen Volumen reicht die Flüssigkeit dort gerade bis zum Aequator und bei letzterem bis zu den Polen; bei noch grösserem Volumen umschliesst sie das ganze Ellipsoid, wobei aber immer die Tiefe der Flüssigkeit an den Polen grösser oder kleiner als am Aequator ist, je nachdem das anziehende Ellipsoid abgeplattet oder verlängert ist.

Nehmen wir z. B. als ellipsoidischen Kern die Erde, diese homogen und ruhend gedacht, und fragen uns, wie hoch eine Flüssigkeit über den Polen stehen müsste, wenn sie gerade bis zum Aequator reichen soll. Es ist zu setzen, unter h die gesuchte Höhe verstanden:

$$(c + h)^2 + \frac{3}{5}e^2 = c^2 + e^2,$$

woraus folgt:

$$h = \frac{1}{5} \cdot \frac{e^2}{c}.$$

Es ist aber $\frac{e^2}{c^2}$ gleich der doppelten Abplattung, also ungefähr $\frac{1}{150}$; c ist etwa gleich 858 Meilen zu setzen und demnach kommt:

$$h = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{150} \cdot 858 = 1\frac{1}{7} \text{ Meile (nahe).}$$

Es mag noch besonders daran erinnert werden, dass in den vorhergehenden Erörterungen die Anziehung, welche die Flüssigkeit auf sich selbst ausübt, ganz ausser Acht gelassen ist.

II. Entwicklungen über das Potential eines Ellipsoides von veränderlicher Dichtigkeit.

§. 7. Aeusseres Potential eines Körpers, der aus zwei von ellipsoidischen Flächen begrenzten Schichten von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Wir denken uns ein Ellipsoid, dessen Volumen mit E , dessen Halbaxen, nach ihrer Länge absteigend geordnet, mit a, b, c und dessen Excentricitäten mit e und ε bezeichnet werden mögen; diese sind definirt durch die Gleichungen:

$$a^2 - c^2 = e^2, \quad b^2 - c^2 = \varepsilon^2.$$

Den Mittelpunkt desselben nehmen wir zum Coordinaten-Ursprung, seine Axenrichtungen zu Coordinatenaxen, und zwar so, dass die Axen $2a, 2b, 2c$ resp. in die Axen der x, y, z fallen. Innerhalb dieses Ellipsoides denken wir uns ein zweites concentrisches, dessen Axen mit denen des erstern gleichgerichtet sind; für dieses zweite Ellipsoid seien die entsprechenden Grössen: $E', a', b', c', e', \varepsilon'$. Dieser ellipsoidische Kern sei mit Masse von der Dichtigkeit ρ' , die zwischen den beiden Ellipsoiden eingeschlossene Schale mit Masse von der Dichtigkeit ρ erfüllt. Zudem wollen wir von jetzt an stets annehmen, dass für alle zur Sprache kommenden Ellipsoide die Excentricitäten so klein seien, dass wir uns auf die Quadrate derselben beschränken können. Die für das äussere Potential zu entwickelnden Formeln bleiben indess der Bemerkung in §. 3 zufolge auch dann noch richtig, wenn zwar die Excentricitäten beliebig gross sind, der angezogene Punkt dagegen sehr weit entfernt ist.

Der äussere Punkt, auf den sich das Potential V des beschriebenen Körpers bezieht, habe die Coordinaten x, y, z und den Radiusvector r ; letzterer bilde mit den Axen der x und y resp. die Winkel μ und ν . Das Potential V lässt

sich betrachten als die Summe des Potentials des Ellipsoides E, gefüllt mit Masse von der Dichtigkeit ϱ , und des Potentials des Ellipsoides E', gefüllt mit Masse von der Dichtigkeit $\varrho' - \varrho$. Demgemäss hat man nach § 3, Gl. 5:

$$V = E\varrho \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5} \right\} \\ + E'(\varrho' - \varrho) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e'^2 x^2 + \varepsilon'^2 y^2}{r^5} \right\},$$

wofür wir auch, wenn wir zur Abkürzung

$$E\varrho = \sigma, \quad E'(\varrho' - \varrho) = \sigma'$$

setzen, schreiben können:

$$7) \quad V = (\sigma + \sigma') \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)}{r^3} \\ + \frac{3}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2)x^2 + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)y^2}{r^5}.$$

Um die Niveauflächen dieses Potentials zu bestimmen, schreiben wir die vorige Formel zunächst folgendermassen:

$$V = (\sigma + \sigma') \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)}{r^3} \\ + \frac{3}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) \cos^2 \mu + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2) \cos^2 \nu}{r^3};$$

dann setzen wir:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{\sigma + \sigma'} + h,$$

wo h von derselben Ordnung ist, wie die Quadrate der Excentricitäten. Substituirt man diesen Ausdruck in die vorige Formel für das Potential, so erhält man für h folgende Gleichung:

$$0 = h - \frac{1}{10} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^3 \\ + \frac{3}{10} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \mu + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \nu \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^3.$$

Mittelst des hieraus sich ergebenden Werthes von h erhält jetzt die Gleichung der Niveauflächen folgende Gestalt:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{\sigma + \sigma'} + \frac{1}{10} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^3$$

$$-\frac{3}{10} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \mu + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \nu \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^3,$$

wofür wir aber wieder bei gleicher Genauigkeit der einfachern geometrischen Interpretation wegen die folgende durch Quadrirung erhaltene setzen:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4 - \frac{3}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \mu + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \cos^2 \nu \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4.$$

Wenn man diese Gleichung ganz in derselben Weise wie in §. 4 mit der in den Coordinaten r, μ, ν ausgedrückten Gleichung eines Ellipsoides vergleicht, dessen Halbaxen a, b, c sind, so erhellt, dass die dem Potentialwerthe V correspondirende Niveaufläche sich als ein Ellipsoid betrachten lässt, dessen Halbaxen a, b, c durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} - 2 \frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{b^2} = \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} - 2 \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right] \left(\frac{V}{\sigma + \sigma'} \right)^4,$$

oder bei gleicher Annäherung:

$$a^2 = \left(\frac{\sigma + \sigma'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} - 2 \frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} \right],$$

$$b^2 = \left(\frac{\sigma + \sigma'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} - 2 \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right],$$

$$c^2 = \left(\frac{\sigma + \sigma'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} + \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} \right].$$

Weiter ergibt sich hieraus noch:

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'}, \\ b^2 - c^2 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'}. \end{aligned}$$

Da hiernach die Excentricitäten der Ellipsoide, welche wir an die Stelle der Niveauflächen setzen können, von dem die einzelnen Niveauflächen unterscheidenden Potentialwerthe V unabhängig, demnach für die ganze Schaar constant sind, so sind auch hier wieder die in Rede stehenden Ellipsoide confocal. Die Kraftlinien, welche sich dem Potentiale des betrachteten Körpers zuordnen, lassen sich demgemäss wieder ersetzen durch die Durchschnittscurven der ein- und zweischaligen confocalen Hyperboloide, welche mit den Niveauflächen ein System von Orthogonalflächen bilden.

Auch ergibt sich aus dem Obigen:

$$\frac{4}{3}abc\pi = \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma + \sigma'}{V} \right)^3 \pi,$$

woraus folgt, dass hier ebenso, wie in §. 6 für ein homogenes Ellipsoid gefunden wurde, der Quotient $\frac{\sigma + \sigma'}{V}$ dem Radius der Kugel gleich ist, die mit der betreffenden Niveaufläche gleiches Volumen umschliesst. Wie aus dem Obigen so gleich hervorgeht, bedeutet aber $\sigma + \sigma'$ nichts Anderes, als die Masse des anziehenden Körpers.

§. 8. Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit, welche ausser ihrer eigenen Anziehung noch der Anziehung eines festen homogenen Ellipsoides unterworfen ist.

1. Ueber ein festes, ruhendes Ellipsoid sei eine Flüssigkeit ausgebreitet, deren Gleichgewichtsfigur wir unter der Voraussetzung bestimmen wollen, dass ausser der Anziehung des festen Kernes auch noch die eigene der Flüssigkeit in Betracht kommt. Wir beschränken aber hier wie im Folgenden überall die Frage dahin, dass wir nur untersuchen, ob ein Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten eine mögliche Gleichgewichtsfigur für die Flüssigkeit sei.

Die Flüssigkeit mit dem festen Kern bildet ein System

von der im vorigen Paragraph besprochenen Art, und für den Gleichgewichtszustand muss die freie Oberfläche der erstern mit einer ellipsoidischen Niveaufäche des Potentials des ganzen Systems zusammenfallen. Daher haben wir nach dem vorigen Paragraph unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise zur Bestimmung der Excentricitäten e und ε der freien Oberfläche der Flüssigkeit die folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma e^2 + \sigma' e'^2}{\sigma + \sigma'} = e^2, \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2}{\sigma + \sigma'} = \varepsilon^2,$$

woraus folgt:

$$e^2 = \frac{3\sigma' e'^2}{2\sigma + 5\sigma'} = \frac{3}{5 + 2\frac{\sigma}{\sigma'}} e'^2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{3\sigma' \varepsilon'^2}{2\sigma + 5\sigma'} = \frac{3}{5 + 2\frac{\sigma}{\sigma'}} \varepsilon'^2.$$

Da mithin die obigen Bedingungsgleichungen für das hydrostatische Gleichgewicht sich stets durch kleine Werthe für die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche befriedigen lassen, so ist hierdurch zunächst nachgewiesen, dass in der That die Flüssigkeit sich dadurch ins Gleichgewicht setzen kann, dass ihre Oberfläche eine Gestalt annimmt, welche bis auf Grössen vierter Ordnung mit einer ellipsoidischen zusammenfällt.

Setzen wir jetzt das Volumen der Flüssigkeit = F , dasjenige des festen Kernes = K (wobei also K mit der Grösse E' des vorigen Paragraphen zusammenfällt), so ist:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\varrho E}{(\varrho' - \varrho) E'} = \frac{F + K}{\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - 1\right) K}.$$

Da hiernach $\frac{\sigma}{\sigma'}$ aus den Daten der Aufgabe sich berechnen lässt, so sind auch nach dem Vorhergehenden die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche als bekannt anzusehen. Zur Bestimmung des Potentialwerthes in derselben erhält man aus dem vorigen Paragraph sofort die Gleichung:

$$\frac{4}{3} \left(\frac{\sigma + \sigma'}{V} \right)^3 \pi = F + K,$$

$$\frac{\sigma + \sigma'}{V} = \sqrt[3]{\frac{F + K}{\frac{4}{3}\pi}}.$$

Wenn hiernach der Quotient $\frac{\sigma + \sigma'}{V}$ für die ellipsoidische Oberfläche der Flüssigkeit gefunden ist, so ergeben sich auch nach den Formeln in §. 7 mit Hülfe der vorher gefundenen Excentricitäten die Axen derselben.

Wenn die Dichte des festen Kernes diejenige der Flüssigkeit übersteigt, so wird $\frac{\sigma}{\sigma'}$ offenbar positiv und die obigen Ausdrücke für die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche im Vergleich mit §. 6 lehren, dass dieselben kleiner sind, die Flüssigkeitsoberfläche also der Kugelgestalt näher kommt, als wenn die Flüssigkeit nicht auf sich selbst anziehend wirkte. Die Excentricitäten e und ε werden desto kleiner, je grösser $\frac{\sigma}{\sigma'}$ wird, je grösser also das Volumen der Flüssigkeit F im Vergleich mit dem Volumen K des festen Kernes ist, oder je näher der Quotient $\frac{\sigma'}{\sigma}$ der Einheit kommt, je weniger sich also die Dichtigkeit der Flüssigkeit von der des festen Kernes unterscheidet.

2. Wenn wir zu den vorhin zu Grunde gelegten Annahmen noch die hinzufügen, dass das ganze System eine gleichförmige Rotationsbewegung mit der verhältnissmässig kleinen Winkelgeschwindigkeit θ um die z -Axe besitze, so lässt sich ebenso mittelst der frühern Entwicklungen die Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit bestimmen. Die nach der x - und y -Axe genommenen Componenten der Centrifugalkraft für die Theilchen der Flüssigkeitsoberfläche sind nämlich:

$$\theta^2 x = \frac{d[\frac{1}{2}\theta^2(x^2 + y^2)]}{dx}, \quad \theta^2 y = \frac{d[\frac{1}{2}\theta^2(x^2 + y^2)]}{dy},$$

und die nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung besteht hiernach darin, dass der Ausdruck

$fV + \frac{1}{2}\theta^2(x^2 + y^2)$,
 worin f die Attractionsconstante bedeutet, in der ganzen freien Oberfläche der Flüssigkeit einen constanten Werth erlangt. Wir wollen auch hier bloss zusehen, ob bei Vernachlässigung der Grössen vierter Ordnung ein Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten eine mögliche Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit sei. Wir haben dann wieder ein System, wie es in §. 7 behandelt wurde, und können demnach die obige Bedingungsgleichung für die Oberfläche, indem wir für das Gesamtpotential V seinen Werth setzen, nach Division mit f folgendermassen schreiben:

$$\frac{\sigma + \sigma'}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2)x^2 + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)y^2}{r^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

In den Gliedern vorstehender Gleichung, welche die Excentricitäten enthalten, können wir r einfach durch die Polar-Halbaxe c der Flüssigkeit ersetzen; für das erste Glied dagegen muss $\frac{1}{r}$ bis auf die Quadrate der Excentricitäten durch die Coordinaten x und y ausgedrückt werden. Zu dem Ende formen wir die Gleichung der als ellipsoidisch angenommenen Oberfläche:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in die folgende um:

$$\frac{x^2}{c^2 + e^2} + \frac{y^2}{c^2 + \varepsilon^2} + \frac{r^2 - x^2 - y^2}{c^2} = 1,$$

woraus sich bei der hier beabsichtigten Annäherung leicht ergibt:

$$\frac{r^2}{c^2} = 1 + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{c^4},$$

oder endlich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2c^5}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das erste Glied der obigen Bedingungsgleichung für die Oberfläche der Flüssigkeit, so geht dieselbe in folgende über:

$$\frac{\sigma + \sigma'}{c} - \frac{1}{10} \cdot \frac{(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) + (\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2)}{c^3} + \left(\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) - 5(\sigma + \sigma')e^2}{10c^5} \right) x^2 + \left(\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3(\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2) - 5(\sigma + \sigma')\varepsilon^2}{10c^5} \right) y^2 = \text{Const.}$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt werden, wenn die Coefficienten von x^2 und y^2 verschwinden, woraus sich die folgenden zwei Gleichungen ergeben:

$$\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3(\sigma e^2 + \sigma' e'^2) - 5(\sigma + \sigma')e^2}{10c^5} = 0,$$

$$\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3(\sigma \varepsilon^2 + \sigma' \varepsilon'^2) - 5(\sigma + \sigma')\varepsilon^2}{10c^5} = 0.$$

Hieraus leiten wir für die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche folgende Werthe ab:

$$e^2 = \frac{3\sigma' e'^2 + \frac{5c^5 \theta^2}{f}}{2\sigma + 5\sigma'},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{3\sigma' \varepsilon'^2 + \frac{5c^5 \theta^2}{f}}{2\sigma + 5\sigma'}.$$

In dem im Zähler dieser Ausdrücke auftretenden Gliede $\frac{5c^5 \theta^2}{f}$ darf wegen des sehr kleinen Factors θ^2 bei der hier überall nur beabsichtigten Annäherung für c irgend ein Halbmesser der Flüssigkeitsoberfläche, also unter Andern auch der Halbmesser einer Kugel von gleichem Volumen gesetzt werden, der sich sogleich aus dem Volumen des festen Kernes und der Flüssigkeit ergibt. Nachdem so die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche gefunden sind, bilden wir zur Bestimmung der Axen derselben die Gleichung:

$$\frac{4}{3} \pi abc = K + F,$$

oder:

$$c^2(c^2 + e^2)(c^2 + \varepsilon^2) = \left(\frac{K + F}{\frac{4}{3}\pi} \right)^2.$$

Bis auf die Quadrate der Excentricitäten entwickelt, geht dieselbe in folgende über:

$$c^6 + (e^2 + \varepsilon^2)c^4 = \left(\frac{K+F}{\frac{4}{3}\pi}\right)^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$c^2 = \left(\frac{K+F}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} - \Delta,$$

so findet man sogleich nach Bestimmung der Correction Δ :

$$c^2 = \left(\frac{K+F}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} - \frac{e^2 + \varepsilon^2}{3},$$

und hieraus ergibt sich weiter für die andern Axen:

$$a^2 = c^2 + e^2 = \left(\frac{K+F}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} + \frac{2e^2 - \varepsilon^2}{3},$$

$$b^2 = c^2 + \varepsilon^2 = \left(\frac{K+F}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} + \frac{2\varepsilon^2 - e^2}{3}.$$

Somit ist die Oberfläche der Flüssigkeit vollkommen bestimmt.

Haben wir, um einen speciellen Fall der obigen Formeln hervorzuheben, eine flüssige Masse ohne festen Kern, welche mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit θ rotirt, so ist σ' im Frühern durch Null zu ersetzen. Dadurch werden e und ε einander gleich und die Flüssigkeit nimmt die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoides an. Die Excentricität ist bestimmt durch die Gleichung:

$$e^2 = \frac{5c^5\theta^2}{2\sigma f},$$

worin σ jetzt die Masse der Flüssigkeit bedeutet. Wenden wir diese Formel auf die als ursprünglich flüssig vorausgesetzte Erde an. Für c setzen wir den mittleren Erdhalbmesser R und für $\frac{\sigma f}{R^2}$ die mittlere Anziehung g an ihrer Oberfläche; dadurch erhält man:

$$\frac{e^2}{R^2} = \frac{5\theta^2 R}{2g}.$$

Da der mittlere Sonnentag von 86400 Secunden sich zur Rotationszeit der Erde verhält wie 1 : 0,99726967, so haben wir:

$$\theta = \frac{2\pi}{86400 \cdot 0,99726967} = \text{numlog } 0,8628536 - 5.$$

Für R setzen wir 858,5 geogr. Meilen, d. h. den Halbmesser der Kugel, die mit der Erde gleiches Volumen hat; dabei wird die geogr. Meile zu 7420,44 Meter gerechnet. Für g wollen wir 9,7974 Meter setzen (das Mittel aus den Werthen für die Acceleration der Schwere an den Endpunkten der Polaraxe und zweier Aequatorialdurchmesser). Dadurch erhalten wir:

$$\frac{e^2}{R^2} = \frac{1}{115,7},$$

oder, die Abplattung der Erde mit p bezeichnet:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{R^2} = \frac{1}{231}.$$

Diese Abplattung müsste also die Erde unter Voraussetzung der Homogenität und des ursprünglich flüssigen Zustandes zeigen.

§. 9. Aeusseres Potential eines Körpers, der aus beliebig vielen ellipsoidischen Schichten von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Wir denken uns einen Körper, zusammengesetzt aus einer beliebigen Anzahl von Schichten, die von ellipsoidischen Flächen mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten begrenzt und mit Masse, deren Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechselt, erfüllt sind. Die Dichtigkeiten der einzelnen Schichten seien, von aussen angefangen, ϱ , ϱ' , ϱ'' u. s. w.; die von den äussern Begrenzungsflächen derselben umschlossenen Volumina seien E, E', E'' u. s. f.; die Excentricitäten derselben seien endlich e, ε ; e', ε' ; e'', ε'' u. s. w. Das Potential V des in Rede stehenden Körpers kann man betrachten als die Summe der Potentiale der Ellipsoide E, E', E'', ..., solche der Reihe nach mit Masse von den Dichtigkeiten ϱ , $\varrho' - \varrho$, $\varrho'' - \varrho'$, ... erfüllt gedacht. Daher erhält man, wenn sonst die frühern Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\begin{aligned}
V = & E_{\varrho} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{r^5} \right) \\
& + E'(\varrho' - \varrho) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e'^2 x^2 + \varepsilon'^2 y^2}{r^5} \right) \\
& + E''(\varrho'' - \varrho') \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e''^2 + \varepsilon''^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e''^2 x^2 + \varepsilon''^2 y^2}{r^5} \right) \\
& + \dots,
\end{aligned}$$

oder, wenn wir die Differenzen $\varrho' - \varrho$, $\varrho'' - \varrho'$ u. s. f., also die Dichtigkeitsüberschüsse jeder folgenden Schicht gegen die vorhergehende, mit $\delta\varrho'$, $\delta\varrho''$, ... bezeichnen, mittelst einer leicht verständlichen Anwendung des Summenzeichens:

$$\begin{aligned}
8) \quad V = & \frac{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{E_{\varrho}(e^2 + \varepsilon^2) + \sum E' \delta\varrho'(e'^2 + \varepsilon'^2)}{r^3} \\
& + \frac{3}{10} \cdot \frac{(E_{\varrho}e^2 + \sum E' \delta\varrho'e'^2)x^2 + (E_{\varrho}\varepsilon^2 + \sum E' \delta\varrho'\varepsilon'^2)y^2}{r^5}.
\end{aligned}$$

Um zunächst wieder die Niveauflächen dieses Potentials zu bestimmen, führen wir wie früher in ähnlichen Fällen die Winkel μ und ν ein, welche der Radiusvector mit den Axen der x und y bildet. Wir schreiben also:

$$\begin{aligned}
V = & \frac{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{E_{\varrho}(e^2 + \varepsilon^2) + \sum E' \delta\varrho'(e'^2 + \varepsilon'^2)}{r^3} \\
& + \frac{3}{10} \cdot \frac{(E_{\varrho}e^2 + \sum E' \delta\varrho'e'^2)\cos^2\mu + (E_{\varrho}\varepsilon^2 + \sum E' \delta\varrho'\varepsilon'^2)\cos^2\nu}{r^3};
\end{aligned}$$

dann setzen wir:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} + h.$$

Substituieren wir diesen Ausdruck in die vorige Formel, so erhalten wir bei gehöriger Vernachlässigung der Grössen, welche die zweite Dimension übersteigen, zur Bestimmung der Correction h folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = h - & \left[\frac{E_{\varrho}e^2 + \sum E' \delta\varrho'e'^2}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} + \frac{E_{\varrho}\varepsilon^2 + \sum E' \delta\varrho'\varepsilon'^2}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} \right] \left(\frac{V}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} \right)^3 \\
& + \frac{3}{10} \left[\frac{E_{\varrho}e^2 + \sum E' \delta\varrho'e'^2}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} \cos^2\mu \right. \\
& \left. + \frac{E_{\varrho}\varepsilon^2 + \sum E' \delta\varrho'\varepsilon'^2}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} \cos^2\nu \right] \left(\frac{V}{E_{\varrho} + \sum E' \delta\varrho'} \right)^3.
\end{aligned}$$

Mittelst des von dieser Gleichung gelieferten Werthes von

h erhält man nach dem Obigen die Gleichung der Niveauflächen in folgender Gestalt:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} + \frac{1}{10} \left[\frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} + \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right] \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^3 - \frac{3}{10} \left[\frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \cos^2 \mu + \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \cos^2 \nu \right] \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^3.$$

Ganz ebenso wie in §. 4 und §. 7 ersetzen wir aber der einfachern geometrischen Deutung wegen diese Gleichung durch die folgende, durch Quadrirung derselben erhaltene:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} + \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right] \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^4 - \frac{3}{5} \left[\frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \cos^2 \mu + \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \cos^2 \nu \right] \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^4.$$

Wie in den frühern analogen Fällen ergibt sich aus dieser Gleichung, dass bei der hier überall nur in's Auge gefassten Annäherung die Niveauflächen als Ellipsoide betrachtet werden können, deren Axen $2a$, $2b$, $2c$ sich aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} + \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right] \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{E_{\rho} e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^4,$$

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{E_{\rho} \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \left(\frac{V}{E_{\rho} + \Sigma E' \delta \rho'} \right)^4.$$

Hieraus fließen folgende Werthe für die reciproken Quadrate der Halbaxen a , b , c :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right] \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^4, \\ \frac{1}{b^2} &= \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right] \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^4, \\ \frac{1}{c^2} &= \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right] \left(\frac{V}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right)^4; \end{aligned}$$

für die Quadrate der Halbaxen selbst hat man also bei gleichem Grade der Annäherung:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} - 2 \frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right], \\ b^2 &= \left(\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} - 2 \frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right], \\ c^2 &= \left(\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \left[\frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} + \frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'} \right]. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen sind die Halbaxen der Niveauflächen bestimmt. Für die Excentricitäten hat man:

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}, \\ b^2 - c^2 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2}{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}. \end{aligned}$$

Vorstehende Ausdrücke für die Excentricitäten zeigen, indem sie vom Werthe des Potentials V unabhängig sind, dass die Ellipsoide, durch welche wir die Niveauflächen mit Vernachlässigung von Grössen 4. Ordnung ersetzen können, confocal sind. Auch hat man wieder für das von einer Niveaufläche umschlossene Volumen:

$$\frac{4}{3} abc \pi = \frac{4}{3} \left(\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} \right)^3 \pi,$$

so dass dasselbe ähnlich wie früher dem Volumen einer Kugel vom Radius $\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V}$ gleichkommt. Der Ausdruck

$E_0 + \Sigma E' \delta \rho'$ bedeutet natürlich die Gesamtmasse des der Betrachtung zu Grunde gelegten Körpers.

§. 10. Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit, welche ausser ihrer eigenen Anziehung der Einwirkung eines festen Körpers unterliegt, in welchem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen wechselt.

Die äusserste Schicht des im vorigen Paragraph betrachteten Körpers werde von einer Flüssigkeit gebildet; dann muss im Gleichgewichtszustande die Oberfläche derselben mit einer Niveaufläche des ganzen Systems zusammenfallen. Stellen wir also die Frage speciell dahin, ob eine ellipsoidische Oberfläche der Flüssigkeit mit kleinen Excentricitäten eine mögliche Gleichgewichtsfigur sei, so können wir die obigen Formeln anwenden, welche für die Excentricitäten e und ε der Oberfläche folgende Gleichungen liefern:

$$e^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{E_0 e^2 + \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{E_0 + \Sigma E' \delta \rho'},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{E_0 \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{E_0 + \Sigma E' \delta \rho'}.$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Summen beziehen sich nach dem Obigen auf den festen ellipsoidischen Kern. Dieselben liefern für die gesuchten Excentricitäten e und ε folgende Werthe:

$$e^2 = \frac{3 \Sigma E' \delta \rho' e'^2}{2E_0 + 5 \Sigma E' \delta \rho'}, \quad \varepsilon^2 = \frac{3 \Sigma E' \delta \rho' \varepsilon'^2}{2E_0 + 5 \Sigma E' \delta \rho'}.$$

Da unter den gemachten Annahmen über die Constitution des festen Kernes, über den die Flüssigkeit ausgebreitet ist, vorstehende Ausdrücke stets reelle, kleine Werthe für die Excentricitäten e^2 und ε^2 liefern, durch welche die obigen Gleichgewichtsbedingungen befriedigt werden, so ist hiermit zunächst die Möglichkeit einer ellipsoidischen Gleichgewichtsfigur mit kleinen Excentricitäten für die Flüssigkeit dargethan.

Das Volumen E , welches in obigen Ausdrücken auftritt, ist natürlich gleich $F + K$ zu setzen, unter F jenes der Flüssigkeit und unter K das des festen Kernes verstanden (wobei also K mit der vorhin mit E' bezeichneten Grösse

zusammenfällt). Für den Potentialwerth in der Oberfläche der Flüssigkeit haben wir demgemäss nach den Entwicklungen in §. 9 die folgende Gleichung:

$$F + K = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} \right)^3,$$

woraus sogleich sich ergibt:

$$\frac{E_Q + \Sigma E' \delta Q'}{V} = \sqrt[3]{\frac{F + K}{\frac{4}{3}\pi}}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes und der vorhin gefundenen Excentricitäten können nach den im vorigen Paragraph aufgestellten Formeln für die Niveaulächen sogleich die Axen der ellipsoidischen Flüssigkeitsoberfläche gefunden werden.

Auch in dem zweiten Falle, wenn das System eine gleichförmige Rotationsbewegung mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit θ um die z-Axe ausführt, gibt es eine ellipsoidische Oberfläche mit kleinen Excentricitäten, welche den Gleichgewichtsbedingungen genügt. Ganz ebenso, wie in §. 8, findet man nämlich jetzt folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung der Excentricitäten der Oberfläche:

$$\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3[E_Q e^2 + \Sigma E' \delta Q' e'^2] - 5[E_Q + \Sigma E' \delta Q'] e^2}{10c^5} = 0,$$

$$\frac{\theta^2}{2f} + \frac{3[E_Q \varepsilon^2 + \Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2] - 5[E_Q + \Sigma E' \delta Q'] \varepsilon^2}{10c^5} = 0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe:

$$e^2 = \frac{3\Sigma E' \delta Q' e'^2 + \frac{5c^5 \theta^2}{f}}{2E_Q + 5\Sigma E' \delta Q'},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{3\Sigma E' \delta Q' \varepsilon'^2 + \frac{5c^5 \theta^2}{f}}{2E_Q + 5\Sigma E' \delta Q'}.$$

Im Zähler dieser Brüche darf für c irgend ein Halbmesser der Oberfläche der Flüssigkeit gesetzt werden. Die Axen derselben ergeben sich aus den gefundenen Excentricitäten und dem gegebenen Volumen des festen Kernes, sowie der Flüssigkeit, ganz ebenso wie in §. 8 gezeigt wurde.

§. 11. Gleichgewicht eines Systems zweier Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, welche einen ellipsoidischen festen Körper umgeben.

In dem ellipsoidischen festen Körper, dessen Volumen E sei und dessen Oberfläche die Excentricitäten e und ε aufweise, ändere sich die Dichtigkeit irgendwie, stetig oder sprungweise, nach ellipsoidischen Flächen, deren Excentricitäten klein und deren Axen mit denen der Oberfläche gleichgerichtet sind. Dann kann nach §. 9 das äussere Potential W desselben durch folgende Formel dargestellt werden:

$$W = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2+Qy^2}{r^5}.$$

Darin haben die Constanten M, P, Q der Bezeichnungsweise in §. 9 gemäss folgende Werthe:

$E\rho + \Sigma E'\delta\rho', \quad E\rho e^2 + \Sigma E'\delta\rho'e'^2, \quad E\rho\varepsilon^2 + \Sigma E'\delta\rho'\varepsilon'^2;$
speciell bedeutet also M die Masse des anziehenden Körpers, und die Constanten P und Q sind von derselben Ordnung wie die Quadrate der Excentricitäten.

Ueber diesen festen Kern sei eine aus zwei Schichten von verschiedener Dichtigkeit bestehende Flüssigkeitsmasse ausgebreitet. Die äussere Flüssigkeit habe die Dichte ρ_1 ; ihre freie Oberfläche habe die Excentricitäten e_1 und ε_1 , die den z -Coordinaten parallele Halbaxe c_1 und umschliesse das Volumen E_1 . Die Dichtigkeit der innern Flüssigkeit sei ρ_2 und die den vorigen analogen Constanten der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten seien $e_2, \varepsilon_2, c_2, E_2$; der Kürze wegen wollen wir noch die der Natur der Sache nach positive Grösse $\rho_2 - \rho_1$ mit σ_2 bezeichnen. Bedingung für das Gleichgewicht ist, dass das Gesamtpotential des ganzen Systems sowohl auf der freien Oberfläche der äussern Flüssigkeit, wie auch auf der Trennungsfläche der äussern und innern einen constanten Werth erlangt.

Das Gesamtpotential V_1 auf der freien Oberfläche der äussern Flüssigkeit setzt sich zusammen aus dem vorhin angegebenen Potentiale des festen Kernes und den Potentialen der Ellipsoide E_1, E_2, E , solche resp. mit Masse von der Dichtigkeit $\rho_1, \sigma_2, -\rho_2$ erfüllt gedacht. Demnach hat man:

$$V_1 = \frac{M + E_1 \rho_1 + E_2 \sigma_2 - E \rho_2}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P + Q + E_1 \rho_1 (e_1^2 + \varepsilon_1^2) + E_2 \sigma_2 (e_2^2 + \varepsilon_2^2) - E \rho_2 (e^2 + \varepsilon^2)}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P + E_1 \rho_1 e_1^2 + E_2 \sigma_2 e_2^2 - E \rho_2 e^2)x^2 + (Q + E_1 \rho_1 \varepsilon_1^2 + E_2 \sigma_2 \varepsilon_2^2 - E \rho_2 \varepsilon^2)y^2}{r^5}.$$

Macht man nun ähnlich wie in §. 8. 2 im ersten Gliede dieses Ausdruckes die Substitution:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_1} - \frac{e_1^2 x^2 + \varepsilon_1^2 y^2}{2c_1^5}$$

und ersetzt in den andern Gliedern r einfach durch c_1 , so erhält man, wenn man die resultirenden Coefficienten von x^2 und y^2 der Null gleichsetzt, folgende zwei Gleichungen zwischen den Excentricitäten $e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2$:

$$a) (5M + 2E_1 \rho_1 + 5E_2 \sigma_2 - 5E \rho_2)e_1^2 - 3E_2 \sigma_2 \cdot e_2^2 = 3P - 3E \rho_2 e^2,$$

$$b) (5M + 2E_1 \rho_1 + 5E_2 \sigma_2 - 5E \rho_2)\varepsilon_1^2 - 3E_2 \sigma_2 \cdot \varepsilon_2^2 = 3Q - 3E \rho_2 \varepsilon^2.$$

Um das Gesamtpotential V_2 auf der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten auszudrücken, ist zu bedenken, dass die Punkte dieser Fläche für das Ellipsoid E_1 innere sind. Demnach nimmt nach §. 1 das Potential des Ellipsoides E_1 nun folgende Gestalt an:

$$\frac{3E_1 \rho_1}{2c_1} \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] - \frac{E_1 \rho_1 x^2}{2c_1^3} \left[1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{3e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] - \frac{E_1 \rho_1 y^2}{2c_1^3} \left[1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{e_1^2 + 3\varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] - \frac{E_1 \rho_1 z^2}{2c_1^3} \left[1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right].$$

Da der Punkt (x, y, z) jetzt auf einem Ellipsoide mit den Constanten c_2, e_2, ε_2 liegt, so setzen wir in vorstehendem Ausdrücke:

$$z^2 = c_2^2 \left(1 - \frac{x^2}{c_2^2 + e_2^2} - \frac{y^2}{c_2^2 + \varepsilon_2^2} \right),$$

oder nach gehöriger Entwicklung:

$$z^2 = c_2^2 - x^2 \left(1 - \frac{e_2^2}{c_2^2} \right) - y^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2^2}{c_2^2} \right).$$

Dadurch nimmt das Potential des Ellipsoides E_1 für die Punkte der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten folgende Form an:

$$\frac{3E_1\rho_1}{2c_1} \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] - \frac{E_1\rho_1 c_2^2}{2c_1^3} \left[1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] \\ + \frac{E_1\rho_1 x^2}{2c_1^3} \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{e_1^2}{c_1^2} - \frac{e_2^2}{c_2^2} \right] + \frac{E_1\rho_1 y^2}{2c_1^3} \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{c_1^2} - \frac{\varepsilon_2^2}{c_2^2} \right].$$

Das Potential des festen Kernes, der Ellipsoide E_2 und E , gefüllt mit Masse von den Dichtigkeiten σ_2 und $-\rho_2$, wird zusammen durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\frac{M + E_2\sigma_2 - E\rho_2}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P + Q + E_2\sigma_2(e_2^2 + \varepsilon_2^2) - E\rho_2(e^2 + \varepsilon^2)}{r^3} \\ + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P + E_2\sigma_2 e_2^2 - E\rho_2 e^2)x^2 + (Q + E_2\sigma_2 \varepsilon_2^2 - E\rho_2 \varepsilon^2)y^2}{r^5}.$$

In dem zweiten und dritten Gliede dieses Ausdruckes ist r durch c_2 , im ersten dagegen ist $\frac{1}{r}$ durch

$$\frac{1}{c_2} - \frac{e_2^2 x^2 + \varepsilon_2^2 y^2}{2c_2^5}$$

zu ersetzen; dadurch geht der vorhergehende Ausdruck in den folgenden über:

$$\frac{M + E_2\sigma_2 - E\rho_2}{c_2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P + Q + E_2\sigma_2(e_2^2 + \varepsilon_2^2) - E\rho_2(e^2 + \varepsilon^2)}{c_2^3} \\ + \frac{3(P + E_2\sigma_2 e_2^2 - E\rho_2 e^2) - 5(M + E_2\sigma_2 - E\rho_2)e_2^2}{10c_2^5} x^2 \\ + \frac{3(Q + E_2\sigma_2 \varepsilon_2^2 - E\rho_2 \varepsilon^2) - 5(M + E_2\sigma_2 - E\rho_2)\varepsilon_2^2}{10c_2^5} y^2.$$

Nach allem Vorhergehenden erhalten wir nun folgenden Ausdruck des Gesamtpotentials des ganzen Systemes für die Punkte der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten:

$$\frac{3E_1\rho_1}{2c_1} \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] - \frac{E_1\rho_1 c_2^2}{2c_1^3} \left[1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{c_1^2} \right] \\ + \frac{M + E_2\sigma_2 - E\rho_2}{c_2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P + Q + E_2\sigma_2(e_2^2 + \varepsilon_2^2) - E\rho_2(e^2 + \varepsilon^2)}{c_2^3} \\ + \left[\frac{E_1\rho_1}{2c_1^3} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{e_1^2}{c_1^2} - \frac{e_2^2}{c_2^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{3(P + E_2\sigma_2 e_2^2 - E\rho_2 e^2) - 5(M + E_2\sigma_2 - E\rho_2)e_2^2}{10c_2^5} \right] x^2$$

$$+ \left[\frac{E_1 \rho_1}{2c_1^3} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{c_1^2} - \frac{\varepsilon_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{3(Q + E_2 \sigma_2 \varepsilon_2^2 - E \rho_2 \varepsilon^2) - 5(M + E_2 \sigma_2 - E \rho_2) \varepsilon_2^2}{10c_2^5} \right] y^2.$$

Setzen wir, da dieser Ausdruck nach Obigem constant sein muss, die Coefficienten von x^2 und y^2 einzeln gleich Null, so erhalten wir zwei weitere Gleichungen zwischen den gesuchten Excentricitäten $e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2$, die wir nach leichter Umformung folgendermassen schreiben können:

$$c) \quad 3E_1 \rho_1 c_2^5 \cdot e_1^2 + (5E \rho_2 c_1^5 - 5Mc_1^5 - 2E_2 \sigma_2 c_1^5 - 5E_1 \rho_1 c_1^2 c_2^3) e_2^2 = 3c_1^5 (E \rho_2 e^2 - P),$$

$$d) \quad 3E_1 \rho_1 c_2^5 \cdot \varepsilon_1^2 + (5E \rho_2 c_1^5 - 5Mc_1^5 - 2E_2 \sigma_2 c_1^5 - 5E_1 \rho_1 c_1^2 c_2^3) \varepsilon_2^2 = 3c_1^5 (E \rho_2 \varepsilon^2 - Q).$$

Für die in diesen Gleichungen auftretenden Grössen c_1 und c_2 kann man wegen der Kleinheit der als Factoren auftretenden Excentricitäten die Halbmesser der Kugeln setzen, welche dieselben Volumina umschliessen wie die Ellipsoide E_1 und E_2 ; dieselben lassen sich aus dem Volumen des festen Kernes und der beiden Flüssigkeiten in der einfachsten Weise ableiten. Sonach sind durch die Gleichungen a), b), c) und d) die gesuchten Excentricitäten der Oberflächen beider Flüssigkeiten vollkommen bestimmt. Die Axen derselben ergeben sich, da die von ihnen umschlossenen Volumina bekannt sind, ganz ebenso wie in §. 8. 2 gezeigt wurde.

Die behandelte Aufgabe liesse sich ebenso lösen, wenn noch die Annahme hinzugefügt würde, dass das ganze System sich mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit θ gleichförmig um die z -Axe drehe. Die in den Flächen E_1 und E_2 constanten Potentialfunctionen müssen für diesen Fall noch um das von den Centrifugalkräften herrührende Glied

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f} (x^2 + y^2)$$

vermehrt werden; in Folge dessen muss dann zu jeder der Gleichungen a) und b) auf der rechten Seite das Glied $\frac{5c_1^5 \theta^2}{f}$ und zu jeder der Gleichungen c) und d) auf der rechten Seite das Glied $\frac{5c_1^5 c_2^5 \theta^2}{f}$ hinzugefügt werden. Lässt

man die Annahme eines festen Kernes fallen, denkt sich also bloss ein um die z -Axe rotirendes System zweier Flüssigkeiten, so müssen in den vorhergehenden Gleichungen M , P , Q , E sämmtlich gleich Null gesetzt werden. Dadurch werden die Gleichungen für e_1 und e_2 identisch mit denjenigen für ε_1 und e_2 , und sowohl die freie Oberfläche als die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten nehmen demnach die Gestalt von Rotationsellipsoiden an, deren Excentricitäten nach dem Obigen leicht zu bestimmen sind.

Die Aufgabe lässt sich leicht verallgemeinern für den Fall, dass die Flüssigkeit aus mehr als zwei Schichten von verschiedener Dichte besteht. Man erhält, wie nach dem Obigen leicht sich ergibt, für die Excentricitätsquadrate der Oberflächen der einzelnen Schichten doppelt so viele lineare Gleichungen, als Schichten vorhanden sind, so dass sich jene stets eindeutig bestimmen lassen; nur werden die Formeln immer weitläufiger, je grösser die Anzahl der Schichten wird. Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, dass in jedem Falle, wenn über einen ellipsoidischen Kern von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit eine aus beliebig vielen Schichten von verschiedener Dichtigkeit bestehende flüssige Masse ausgebreitet wird, eine mögliche Gleichgewichtsfigur existirt, bei welcher alle Oberflächen der einzelnen Schichten der Flüssigkeit innerhalb der von uns ins Auge gefassten Annäherung als ellipsoidisch angesehen werden können; und zwar gilt dieses sowohl, wenn das System ruht, als wenn es um eine der Axen des ellipsoidischen Kernes mit kleiner Winkelgeschwindigkeit rotirt.

§. 12. Potential einer ellipsoidischen Schale.

In §. 9 haben wir das äussere Potential eines ellipsoidischen Körpers aufgestellt, in welchem die Dichtigkeit sich stetig oder sprungweise nach ellipsoidischen Flächen mit gleichen Axenrichtungen und kleinen Excentricitäten ändert. Im Falle einer stetigen Dichtigkeitsänderung treten an die Stelle der in den dortigen Formeln vorkommenden Summen

natürlich entsprechende Integrale. Die Gestalt, welche jene Formeln so annehmen, ist indessen für den vorliegenden Zweck weniger angemessen. Zu geeigneteren Formeln kann man direct gelangen, wenn man zuerst das Potential einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schale sucht. Wir werden übrigens später zeigen, dass beide Reihen von Ausdrücken durch eine einfache Transformation sich in einander überführen lassen.

Wir denken uns also eine ellipsoidische Schale, begrenzt von zwei Ellipsoiden mit kleinen Excentricitäten und gleichen Axenrichtungen. Die Halbaxen der äussern Oberfläche seien a, b, c , ihre Excentricitäten e und ε ; die entsprechenden Grössen für die innere Oberfläche seien a', b', c' , e', ε' ; die Dichte der die Schale erfüllenden Masse sei ρ . Dann erhalten wir für das innere Potential V_i derselben, d. h. für das Potential derselben in einem Punkte innerhalb des von der innern Oberfläche der Schale eingeschlossenen Raumes, nach §. 1 folgenden Ausdruck:

$$V_i = 2ab\rho\pi \left\{ 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{c^2} \right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{c^4} \right\} \\ - 2a'b'\rho\pi \left\{ 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{c'^2} - \frac{r^2}{c'^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{c'^2} \right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{e'^2 x^2 + \varepsilon'^2 y^2}{c'^4} \right\}.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, drücken wir a und b durch c, e, ε und ebenso a' und b' durch c', e', ε' aus. Wir haben nämlich bis auf Grössen 2. Ordnung:

$$a = \sqrt{c^2 + e^2} = c \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{c^2} \right),$$

$$b = \sqrt{c^2 + \varepsilon^2} = c \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{c^2} \right),$$

und ebenso:

$$a' = c' \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e'^2}{c'^2} \right), \quad b' = c' \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon'^2}{c'^2} \right).$$

Daraus folgt weiter mit derselben Annäherung:

$$ab = c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{c^2} \right), \quad a'b' = c'^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{c'^2} \right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige Formel für

das innere Potential der ellipsoidischen Schale, so erhält man nach einfacher Reduction:

$$V_i = 2\rho\pi \left\{ c^2 - c'^2 + \frac{1}{3}(e^2 + \varepsilon^2) - \frac{1}{3}(e'^2 + \varepsilon'^2) - \frac{r^2}{15} \left(\frac{e^2 + \varepsilon^2}{c^2} - \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{c'^2} \right) + \frac{x^2}{5} \left(\frac{e^2}{c^2} - \frac{e'^2}{c'^2} \right) + \frac{y^2}{5} \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - \frac{\varepsilon'^2}{c'^2} \right) \right\}.$$

Denken wir uns nun die Schale, deren Potential aufgestellt werden soll, unendlich dünn, dann können wir unter Anwendung des Differentialzeichens die vorige Formel folgendermassen schreiben:

$$9) \quad V_i = 2\rho\pi \left\{ d\left(c^2 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2\right) - \frac{1}{15}r^2 d\left(\frac{e^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{1}{5}x^2 d\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{1}{5}y^2 d\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) \right\}.$$

Für das Potential V_e der ellipsoidischen Schale in einem Punkte des äusseren Raumes haben wir zunächst nach der obigen Bezeichnungsweise:

$$V_e = \frac{4}{3}abc\rho\pi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e^2 + \varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{r^5} \right) - \frac{4}{3}a'b'c'\rho\pi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e'^2 + \varepsilon'^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e'^2x^2 + \varepsilon'^2y^2}{r^5} \right).$$

Indem wir nach dem Obigen wieder a, b durch c, e, ε und a', b' durch c', e', ε' ausdrücken, können wir statt der vorhergehenden Formel die folgende setzen:

$$V_e = \frac{4}{3}\rho\pi \left\{ \frac{c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{c^3(e^2 + \varepsilon^2)}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{c^3e^2 \cdot x^2 + c^3\varepsilon^2 \cdot y^2}{r^5} \right\} - \frac{4}{3}\rho\pi \left\{ \frac{c'(c'^2 + \frac{1}{2}e'^2 + \frac{1}{2}\varepsilon'^2)}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{c'^3(e'^2 + \varepsilon'^2)}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{c'^3e'^2 \cdot x^2 + c'^3\varepsilon'^2 \cdot y^2}{r^5} \right\}.$$

Denken wir uns nun die Dicke der betrachteten Schale wieder unendlich klein, so können wir unter Anwendung des Differentialzeichens die vorige Formel so schreiben:

$$10) \quad V_e = \frac{4}{3}\rho\pi \left\{ \frac{d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{d[c^3(e^2 + \varepsilon^2)]}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{x^2 d[c^3e^2] + y^2 d[c^3\varepsilon^2]}{r^5} \right\}.$$

Die Formeln 9) und 10) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe.

§. 13. Aeusseres Potential eines ellipsoidischen Körpers, in dem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen sich stetig ändert.

Wir denken uns jetzt wieder einen von einem Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten begrenzten Körper, in dem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen mit kleinen Excentricitäten und gleichgerichteten Axen stetig sich ändert. Die Dichtigkeit in jeder solchen Fläche sowohl als die Excentricitäten derselben betrachten wir als Functionen der Halbaxe c . Eine Schaar stetig auf einander folgender Flächen gleicher Dichtigkeit zertheilt den Körper in eine Reihe ellipsoidischer Schalen, für welche einzeln die Dichtigkeit als constant anzusehen ist. Da nun nach dem vorigen Paragraph das Potential einer solchen Schale bekannt ist, so erhält man das gesuchte Potential V des gegebenen Körpers durch eine vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche sich erstreckende Integration. Bezeichnen wir die den z -Coordinaten parallele Halbaxe der Oberfläche mit c_1 , die Excentricitäten derselben mit e_1 und ε_1 , so haben wir also:

$$V = \frac{4}{3}\pi \left\{ \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3(e^2 + \varepsilon^2)]}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3e^2] \cdot x^2 + \int_0^{c_1} \varrho d[c^3\varepsilon^2] \cdot y^2}{r^5} \right\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$M = \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)], \quad P = \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho d[c^3e^2], \\ Q = \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho d[c^3\varepsilon^2],$$

so können wir demnach schreiben:

$$11) \quad V = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2+Qy^2}{r^5}.$$

Bestimmen wir zuerst wieder die Niveauflächen dieses Potentials. Zu dem Ende schreiben wir, die Winkel μ und ν nach dem Früheren einführend, die vorige Formel folgendermassen:

$$V = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{P \cos^2 \mu + Q \cos^2 \nu}{r^3},$$

und erhalten nach dem mehrfach angewandten Verfahren:

$$\frac{1}{r} = \frac{V}{M} + \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{M} \left(\frac{V}{M} \right)^3 - \frac{3}{10} \left\{ \frac{P}{M} \cos^2 \mu + \frac{Q}{M} \cos^2 \nu \right\} \left(\frac{V}{M} \right)^3,$$

oder der einfachern geometrischen Deutung wegen:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{V}{M} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{P+Q}{M} \left(\frac{V}{M} \right)^4 - \frac{3}{5} \left\{ \frac{P}{M} \cos^2 \mu + \frac{Q}{M} \cos^2 \nu \right\} \left(\frac{V}{M} \right)^4.$$

Die Niveauflächen können also wieder bei der hier erstrebten Annäherung durch Ellipsoide ersetzt werden, für deren Halbachsen a , b , c und Excentricitätsquadrate man findet:

$$a^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{Q-2P}{M}, \quad b^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{P-2Q}{M},$$

$$c^2 = \left(\frac{M}{V} \right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{P+Q}{M},$$

$$a^2 - c^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{P}{M}, \quad b^2 - c^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q}{M}.$$

Da letztere Ausdrücke den Potentialwerth V nicht mehr enthalten, so sind die Excentricitäten für alle äussern Niveauflächen constant. Daraus folgt, dass die in §. 4 und 5 für homogene Ellipsoide angegebenen Sätze über die äussern Niveauflächen und die denselben correspondirenden Kraftlinien auch noch für nicht homogene Ellipsoide mit beliebiger Dichtigkeitsvertheilung gelten, wenn nur die Flächen gleicher Dichtigkeit wieder Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten und gleichen Axenrichtungen sind, indem auch in diesem allgemeinen Falle die äussern Niveauflächen bei Vernachlässigung der vierten Potenzen der Excentricitäten durch eine Schaar confocaler Ellipsoide und demgemäss die äussern Theile der Kraftlinien durch die Schnittcurven der jenen Ellipsoiden zugeordneten confocalen ein- und zweifächerigen Hyperboloide ersetzt werden können. Das Volumen einer Niveaufläche ergibt sich aus dem entsprechenden Potentialwerthe mittelst folgender Gleichung:

$$\frac{4}{3} abc \pi = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{M}{V} \right)^3,$$

wenn man die vierten Potenzen der Excentricitäten, wie

überall in dieser Untersuchung, vernachlässigt. Daher bedeutet auch hier wieder $\frac{M}{V}$ geometrisch den Radius der Kugel-
fläche, welche dasselbe Volumen umschliesst, wie die entsprechende Niveaufläche. Auch möge noch darauf hingewiesen werden, dass die Formel (11) und demgemäss alle aus ihr gezogenen Folgerungen bei beliebigen grössern Excentricitäten dann wieder gelten, wenn der von dem Ellipsoide angezogene Punkt sehr weit entfernt liegt.

Anmerkung. Wenn man sich der in §. 9 entwickelten Formeln bedient, so kann man das äussere Potential des in diesem Paragraph behandelten Ellipsoides folgendermassen schreiben:

$$V = \frac{M'}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P' + Q'}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{P'x^2 + Q'y^2}{r^5},$$

worin zu setzen ist:

$$M' = E_1 \varrho_1 + \Sigma E \delta \varrho, \quad P' = E_1 e_1^2 \varrho_1 + \Sigma E e^2 \delta \varrho, \\ Q' = E_1 \varepsilon_1^2 \varrho_1 + \Sigma E \varepsilon^2 \delta \varrho.$$

Die Grössen E_1 , ϱ_1 , e_1 , ε_1 beziehen sich dabei auf die Oberfläche, E , ϱ , e , ε dagegen auf irgend eine der Flächen gleicher Dichtigkeit innerhalb des Ellipsoides; die Summationen erstrecken sich von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte. Nun ist aber in dem Ausdrücke für M' nach dem Frühern zu setzen:

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi c_1(c_1^2 + \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2), \quad E = \frac{4}{3}\pi c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2);$$

in den Ausdrücken für P' und Q' sind dagegen die Grössen E_1 und E einfach durch $\frac{4}{3}\pi c_1^3$ und $\frac{4}{3}\pi c^3$ zu ersetzen. Somit können wir bei Anwendung des Integralzeichens schreiben:

$$M' = \frac{4}{3}\pi c_1 \varrho_1 (c_1^2 + \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2) - \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} c (c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \frac{d\varrho}{dc} dc, \\ P' = \frac{4}{3}\pi c_1^3 e_1^2 \varrho_1 - \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} c^3 e^2 \frac{d\varrho}{dc} dc, \quad Q' = \frac{4}{3}\pi c_1^3 \varepsilon_1^2 \varrho_1 - \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} c^3 \varepsilon^2 \frac{d\varrho}{dc} dc.$$

Vor den Integralen musste das Minuszeichen gesetzt werden, weil die Integrationsrichtung der Richtung der frühern Summation entgegengesetzt ist. Auf die in diesen Ausdrücken auftretenden Integrale wenden wir nun die Regel der partiellen Integration an; dann kommt:

$$\begin{aligned} \int_0^{c_1} c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \frac{d\varrho}{dc} dc &= c_1 \varrho_1 (c_1^2 + \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2) \\ &- \int_0^{c_1} \varrho \frac{d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{dc} dc, \\ \int_0^{c_1} c^3 e^2 \frac{d\varrho}{dc} dc &= c_1^3 e_1^2 \varrho_1 - \int_0^{c_1} \varrho \frac{d(c^3 e^2)}{dc} dc, \\ \int_0^{c_1} c^3 \varepsilon^2 \frac{d\varrho}{dc} dc &= c_1^3 \varepsilon_1^2 \varrho_1 - \int_0^{c_1} \varrho \frac{d(c^3 \varepsilon^2)}{dc} dc. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke erhalten wir:

$$\begin{aligned} M' &= \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho \frac{d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{dc} dc, \\ P' &= \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho \frac{d(c^3 e^2)}{dc} dc, \quad Q' = \frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho \frac{d(c^3 \varepsilon^2)}{dc} dc, \end{aligned}$$

und wir sehen somit, dass die Ausdrücke M' , P' , Q' , die in der Formel auftreten, welche wir in §. 9 für das äussere Potential eines nicht homogenen Ellipsoides erhielten, mit den entsprechenden M , P , Q , die wir in diesem Paragraph nach einem andern Verfahren fanden, der Sache nach ganz zusammenfallen, sich also von ihnen nur in der Form unterscheiden.

§. 14. Anwendungen der vorhergehenden Ergebnisse.

1. Zuerst möge die in §. 6. 1 für ein homogenes Ellipsoid gelöste Aufgabe wieder vorgenommen werden, wobei wir aber jetzt annehmen, dass das betreffende Ellipsoid nicht mehr homogen, vielmehr seine Dichtigkeit unter den im vorhergehenden Paragraph gemachten Beschränkungen eine beliebige Function der Halbaxe c der betreffenden Schicht sei. Das Potential des Ellipsoides stellen wir wieder durch die Formel dar:

$$V = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2 + Qy^2}{r^5},$$

wo die Grössen M , P , Q die oben gegebenen Werthe haben. Wenn wir nun im Uebrigen die Bezeichnungen des §. 6 ganz beibehalten, so haben wir zu setzen:

$$V' = -\frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2+Qy^2}{r^5},$$

und daraus folgt:

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{3}{10} \cdot \frac{(3P+Q)x}{r^5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{(Px^2+Qy^2)x}{r^7},$$

$$\frac{dV'}{dy} = \frac{3}{10} \cdot \frac{(3Q+P)y}{r^5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{(Px^2+Qy^2)y}{r^7},$$

$$\frac{dV'}{dz} = \frac{3}{10} \cdot \frac{(P+Q)z}{r^5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{(Px^2+Qy^2)z}{r^7}.$$

Hieraus folgen die Componenten des Gegenpaares, welches der Punkt (x, y, z) , in dem die Masse m sich befindet, ausser einer durch den Mittelpunkt gehenden Kraft an dem Ellipsoide erzeugt:

$$E = \frac{3}{5} Qmf \cdot \frac{yz}{r^5}, \quad H = -\frac{3}{5} Pmf \cdot \frac{xz}{r^5},$$

$$Z = \frac{3}{5} (P-Q)mf \cdot \frac{xy}{r^5}.$$

Wenn alle homogenen Schichten des betrachteten Körpers von Rotationsellipsoiden begrenzt sind, so wird $P = Q$, und wenn man dann die xz -Ebene durch den anziehenden Punkt legt, so reducirt sich das Paar auf die Componente H und hat also den Werth:

$$-\frac{3}{5} Pmf \cdot \frac{xz}{r^5} = -\frac{3}{5} Pmf \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^3},$$

wenn wir unter φ wieder den Neigungswinkel des Radiusvector gegen die Aequatorialebene verstehen und eine Drehung von der z - nach der x -Axe als positiv betrachten. Diese Formel hat ganz dieselbe Gestalt, wie die in §. 6 für ein homogenes Rotationsellipsoid abgeleitete, nur ist an die Stelle der dortigen Constante Me^2 jetzt P getreten. Um das Verhältniss beider zu übersehen, schreiben wir:

$$P = \frac{4}{3} \pi e_1^2 \int_0^{c_1} \varrho d(c^3) \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d(c^3 e^2)}{\int_0^{c_1} \varrho d(c^3 e_1^2)}$$

$$= Me_1^2 \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d(c^3 e^2)}{\int_0^{c_1} \varrho d(c^3 e_1^2)},$$

da der Ausdruck

$$\frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \rho d(c^3) = \int_0^{c_1} \rho \cdot 4\pi c^2 dc$$

in erster Annäherung offenbar die Masse des ganzen Ellipsoides darstellt. Wenden wir das Obige auf die Erde an. Unter der Voraussetzung, dass die Gestalt derselben eine den Gesetzen des hydrostatischen Gleichgewichtes genügende sei, muss, wie wir nachher zeigen werden, die Abplattung der einzelnen Schichten nach dem Mittelpunkte zu fortwährend abnehmen; speciell für die Erde ist demnach der Ausdruck:

$$\frac{\int_0^{c_1} \rho d(c^3 e^2)}{\int_0^{c_1} \rho d(c^3 e_1^2)}$$

ein echter Bruch, und das von der Anziehung eines äussern Punktes (des Mondes und der Sonne) herrührende Gegenpaar also kleiner, als es unter Voraussetzung der Homogenität derselben sein würde.

2. Wenn über ein nicht homogenes Ellipsoid von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit, dessen Volumen mit E bezeichnet werde, eine Flüssigkeitsschicht ausgebreitet ist, deren Volumen und Dichte resp. mit F und σ bezeichnet werden mögen, so kann diese dadurch sich ins Gleichgewicht setzen, dass sie eine ellipsoidische Oberfläche annimmt, ähnlich wie in den frühern analogen Fällen. Die Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche seien e_2 und ε_2 , diejenigen der Oberfläche des festen Kernes wie vorhin e_1 und ε_1 ; dann ist das Potential des ganzen Systemes für einen äussern Punkt:

$$V = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2+Qy^2}{r^5} \\ + (E+F)\sigma \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e_2^2 + \varepsilon_2^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e_2^2 x^2 + \varepsilon_2^2 y^2}{r^5} \right\} \\ - E\sigma \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{e_1^2 + \varepsilon_1^2}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e_1^2 x^2 + \varepsilon_1^2 y^2}{r^5} \right\}.$$

In vorstehendem Potentiale, welches in der freien Oberfläche der Flüssigkeit constant werden muss, setzen wir, um dieses analytisch auszudrücken:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_2} - \frac{e_2^2 x^2 + \varepsilon_2^2 y^2}{2c_2^5},$$

unter c_2 die den z -Coordinationen parallele Halbaxe jener Fläche verstanden. In dem so entstehenden Ausdrucke für das Potential in der Flüssigkeitsoberfläche setzen wir die Coefficienten von x^2 und y^2 der Null gleich und erhalten dadurch folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung der Excentricitäten e_2 und ε_2 :

$$3P - 5Me_2^2 - 2(E + F)\sigma e_2^2 - E\sigma(3e_1^2 - 5e_2^2) = 0,$$

$$3Q - 5M\varepsilon_2^2 - 2(E + F)\sigma\varepsilon_2^2 - E\sigma(3\varepsilon_1^2 - 5\varepsilon_2^2) = 0.$$

Aus denselben ergeben sich folgende Werthe:

$$e_2^2 = \frac{3(P - E\sigma e_1^2)}{5M + (2F - 3E)\sigma}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{3(Q - E\sigma\varepsilon_1^2)}{5M + (2F - 3E)\sigma}.$$

Fügen wir noch die Annahme hinzu, dass das ganze System mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit θ um die z -Axe rotire, so erhalten wir leicht folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung der Excentricitäten der Flüssigkeitsoberfläche:

$$e_2^2 = \frac{3(P - E\sigma e_1^2) + \frac{5c_2^5\theta^2}{f}}{5M + (2F - 3E)\sigma}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{3(Q - E\sigma\varepsilon_1^2) + \frac{5c_2^5\theta^2}{f}}{5M + (2F - 3E)\sigma}.$$

Wenn die Excentricitäten der Oberfläche gefunden sind, so lassen sich, da auch das von ihr umschlossene Volumen gegeben ist, die Axen sofort finden, wie früher mehrfach erwähnt wurde.

III. Anwendungen auf die Theorie der Gestalt der Erde.

§. 15. Gleichgewicht einer über einem rotirenden festen Körper von ellipsoidischer Gestalt ausgebreiteten nicht homogenen, mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotirenden Flüssigkeit.

Die Theorie der Gestalt der Erde setzt, wie in der Einleitung bemerkt wurde, voraus, dass dieselbe ursprünglich in einem flüssigen Zustande sich befunden habe und demgemäss eine Gestalt besitze, die den Bedingungen des hydrostatischen Gleichgewichtes entspricht. Die Annahme übrigens, dass der innere Kern der Erde ursprünglich fest und nur die nach Aussen gelegenen Schichten flüssig gewesen wären, stört auch die Theorie, wenigstens in ihren Hauptpunkten; nicht; möglicher Allgemeinheit wegen wollen wir daher von derselben ausgehen.

Man denke sich also ein festes, nicht homogenes Ellipsoid von der im vorhergehenden Abschnitte immer vorausgesetzten Beschaffenheit (vgl. §. 9 und §. 13). Ueber demselben sei eine Flüssigkeit ausgebreitet, deren Dichtigkeit sich von Schicht zu Schicht ändere; das ganze System rotire endlich mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit θ um die z -Axe. Nach den in §. 11 gefundenen Resultaten kann das Gleichgewicht sich dadurch herstellen, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit und ebenso alle Flächen gleicher Dichtigkeit in derselben eine ellipsoidische Gestalt annehmen, wobei die Excentricitäten sämmtlich kleine Werthe erhalten und die Axen derselben mit denen der Schichten des festen Kernes gleich gerichtet sind. Unter Voraussetzung einer stetigen Dichtigkeitsänderung wollen wir aber jetzt die Gleichgewichtsbedingungen der flüssigen Masse direct ent-

wickeln. Wir haben zu dem Ende auszudrücken, dass auf den Flächen gleicher Dichtigkeit das Gesamtpotential des Systemes, vermehrt um den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f} (x^2 + y^2)$, einen constanten Werth erlangen muss.

Es mögen nun c_0, c, c_1 die den z-Coordinaten parallelen Halbmesser des festen Kernes, einer beliebigen der homogenen Schichten der Flüssigkeit und der Oberfläche derselben bezeichnen; e, ε, ρ seien die Excentricitäten und die Dichtigkeit der gerade betrachteten Schicht, $e_1, \varepsilon_1, \rho_1$ jene der Oberfläche. Dabei betrachten wir e, ε, ρ als Functionen des Polarhalbmessers c . Wir bilden nun das Gesamtpotential des Systemes für einen Punkt derjenigen Schicht der Flüssigkeit, welche der Halbaxe c entspricht. Das äussere Potential W des festen Kernes werde wieder in folgender Weise dargestellt (vgl. §. 13):

$$W = \frac{M}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Px^2+Qy^2}{r^5}.$$

Für die Punkte der Oberfläche eines Ellipsoides mit den Constanten c, e, ε ist nun zu setzen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} - \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2c^5},$$

und mittelst dieser Substitution nimmt das Potential W für die Punkte jener Fläche die folgende Form an:

$$W = \frac{M}{c} - \frac{1}{10} \cdot \frac{P+Q}{c^3} + \frac{(3P-5Me^2)x^2 + (3Q-5M\varepsilon^2)y^2}{10c^5}.$$

Zweitens müssen wir das Potential W' der Schichten der Flüssigkeit von c_0 bis c nehmen; da die Punkte der dem Polarhalbmesser c entsprechenden Schicht für die erstern Schichten äussere sind, so ist nach §. 12, Gl. 10 zu setzen:

$$W' = \frac{4}{3}\pi \left\{ \frac{\int_{c_0}^c \rho d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{r} - \frac{1}{10} \cdot \frac{\int_{c_0}^c \rho d[c^3(e^2 + \varepsilon^2)]}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\int_{c_0}^c \rho d[c^3 e^2] \cdot x^2 + \int_{c_0}^c \rho d[c^3 \varepsilon^2] \cdot y^2}{r^5} \right\}.$$

Setzen wir auch hier wieder für $\frac{1}{r}$ den oben angegebenen

Ausdruck, so nimmt das Potential W' für die Punkte der betrachteten Schicht die folgende Gestalt an:

$$W' = \frac{4}{3}\pi \left\{ \frac{\int_{c_0}^c \varrho d[c(c^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)]}{c} - \frac{1}{10} \cdot \frac{\int_{c_0}^c \varrho d[c^3(e^2 + \varepsilon^2)]}{c^3} \right. \\ \left. + \frac{(3\int_{c_0}^c \varrho d[c^3e^2] - 5\int_{c_0}^c \varrho d[c^3] \cdot e^2)x^2 + (3\int_{c_0}^c \varrho d[c^3\varepsilon^2] - 5\int_{c_0}^c \varrho d[c^3] \cdot \varepsilon^2)y^2}{10c^5} \right\}.$$

Für die Flüssigkeitsschichten von c bis c_1 ist endlich das innere Potential W'' zu nehmen; es nimmt nach §. 12, Gl. 9 folgenden Ausdruck an:

$$W'' = 2\pi \left\{ \int_c^{c_1} \varrho d[c^2 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2] - \frac{1}{15} \int_c^{c_1} \varrho d\left[\frac{e^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right] \cdot c^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \int_c^{c_1} \varrho d\left[\frac{e^2}{c^2}\right] \cdot x^2 + \frac{1}{5} \int_c^{c_1} \varrho d\left[\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right] \cdot y^2 \right\}.$$

Dabei mag besonders darauf hingewiesen werden, dass in dem zweiten Gliede dieses Ausdruckes, welches die Excentricitäten enthält, r^2 einfach durch c^2 zu ersetzen war. Durch Vereinigung der gefundenen Ausdrücke für W , W' , W'' erhält man endlich das Gesamtpotential V des Systems für die Punkte der dem Polarhalbmesser c entsprechenden Schicht, und die Bedingung, dass

$$V + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f} (x^2 + y^2)$$

für die ganze Schicht constant sein muss, liefert durch Nullificirung der Coefficienten von x^2 und y^2 folgende zwei Gleichungen, welche für sämtliche homogene Schichten der Flüssigkeit erfüllt sein müssen:

$$\frac{3P - 5Me^2}{10c^5} + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3\int_{c_0}^c \varrho d[c^3e^2] - 5\int_{c_0}^c \varrho d[c^3] \cdot e^2}{10c^5} \\ + \frac{2\pi}{5} \int_c^{c_1} \varrho d\left[\frac{e^2}{c^2}\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f} = 0,$$

$$\frac{3Q - 5M\varepsilon^2}{10c^5} + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3\int_{c_0}^c \varrho d[c^3\varepsilon^2] - 5\int_{c_0}^c \varrho d[c^3] \cdot \varepsilon^2}{10c^5} \\ + \frac{2\pi}{5} \int_c^{c_1} \varrho d\left[\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{f} = 0.$$

Man bringt diese Gleichungen sofort in die folgende einfachere Form:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \left\{ \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^c \varrho d[c^3] \right\} e^2 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{P}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^c \varrho d[c^3 e^2] \right. \\
 & \quad \left. + c^5 \int_{c_0}^{c_1} \varrho d \left[\frac{e^2}{c^2} \right] \right\} + \frac{c^5 \theta^2}{4\pi f}, \\
 12) \quad & \frac{1}{3} \left\{ \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} + \int_c^c \varrho d[c^3] \right\} \varepsilon^2 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^c \varrho d[c^3 \varepsilon^2] \right. \\
 & \quad \left. + c^5 \int_{c_0}^{c_1} \varrho d \left[\frac{\varepsilon^2}{c^2} \right] \right\} + \frac{c^5 \theta^2}{4\pi f}.
 \end{aligned}$$

Für die freie Oberfläche der Flüssigkeit wird $c = c_1$ und für diese gelten mithin folgende zwei einfachere Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \left\{ \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^{c_1} \varrho d[c^3] \right\} e_1^2 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{P}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^{c_1} \varrho d[c^3 e^2] \right\} + \frac{c_1^5 \theta^2}{4\pi f}, \\
 13) \quad & \frac{1}{3} \left\{ \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^{c_1} \varrho d[c^3] \right\} \varepsilon_1^2 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi} + \int_{c_0}^{c_1} \varrho d[c^3 \varepsilon^2] \right\} + \frac{c_1^5 \theta^2}{4\pi f}.
 \end{aligned}$$

Lassen wir endlich die Annahme eines festen Kernes innerhalb der rotirenden Flüssigkeit fallen, denken uns also bloss eine um die z-Axe rotirende nicht homogene flüssige Masse, die keiner weiteren Einwirkung unterliegt, als ihrer eigenen Anziehung, so sind die Grössen M, P, Q in den vorigen Gleichungen gleich Null zu setzen. Die beiden Gleichungen für e^2 und ε^2 werden dann identisch, woraus hervorgeht, dass die Flüssigkeit jetzt die Gestalt eines Rotationsellipsoides annimmt. Für die Excentricität einer einzelnen Schicht und diejenige der Oberfläche hat man jetzt die einfachern Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \int_0^c \varrho d[c^3] \cdot e^2 = \frac{1}{5} \left\{ \int_0^c \varrho d[c^3 e^2] + c^5 \int_c^{c_1} \varrho d \left[\frac{e^2}{c^2} \right] \right\} + \frac{c^5 \theta^2}{4\pi f}, \\
 14) \quad & \frac{1}{3} \int_0^{c_1} \varrho d[c^3] \cdot e_1^2 = \frac{1}{5} \int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2] + \frac{c_1^5 \theta^2}{4\pi f}.
 \end{aligned}$$

Die letzte Formel lässt sich leicht so umgestalten, dass man aus ihr das Verhältniss der Excentricität oder der Abplattung der Oberfläche in dem Falle einer nicht homogenen

Flüssigkeit zu jener, die nach §. 8 bei einer homogenen Flüssigkeit auftritt, übersieht. Zu dem Ende schreiben wir dieselbe in folgender Weise:

$$\frac{1}{8} \int_0^{c_1} \varrho d[c^3] \cdot e_1^2 \left\{ 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]} \right\} = \frac{c_1^5 \theta^2}{4\pi f},$$

oder da

$$4\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^{c_1} \varrho d[c^3]$$

in erster Annäherung die Masse der Flüssigkeit bedeutet, welche wir jetzt der Kürze wegen mit M_1 bezeichnen wollen:

$$e_1^2 = \frac{c_1^5 \theta^2}{M_1 f} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]}}.$$

Hierfür schreiben wir:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \frac{5c_1^5 \theta^2}{2M_1 f} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]}} \\ &= \frac{5c_1^5 \theta^2}{2M_1 f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]} \right\}} \\ &= \frac{5c_1^5 \theta^2}{2M_1 f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 (e_1^2 - e^2)]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]}}. \end{aligned}$$

Der erste Factor des letzten Ausdruckes stellt nach §. 8 das Quadrat der Excentricität e dar, die auftreten würde, wenn das rotirende Ellipsoid bei gleicher Masse und bei gleichem Polarhalbmesser homogen wäre; setzt man dann noch:

$$\zeta = \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 (e_1^2 - e^2)]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2]},$$

so kann die vorhergehende Formel folgendermassen geschrieben werden:

$$e_1^2 = e^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\zeta}.$$

Statt der Excentricitäten wollen wir in diese Formeln die Abplattung einführen; setzen wir also die Abplattung der Oberfläche p_1 , die einer innern Schicht p und diejenige, welche im Falle der Homogenität auftreten würde, p , so haben wir zunächst:

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_1^2}{c_1^2}, \quad p = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{c^2}, \quad p = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{c_1^2},$$

und demgemäss nach dem Obigen:

$$p_1 = p \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\zeta}, \quad \zeta = \frac{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3(p_1 c_1^2 - p c^2)]}{\int_0^{c_1} \varrho d[c^3 c_1^2 p_1]}.$$

Wenn, wie es nothwendig sein muss, die Dichtigkeit nach dem Mittelpunkte hin zunimmt, so muss, wie wir nachher sehen werden, die Abplattung der einzelnen Schichten nach der Oberfläche hin fortwährend zunehmen, also stets $p_1 > p$ sein. Demgemäss ist ζ positiv, und die vorstehende Formel zeigt, dass die wirkliche Abplattung der Oberfläche stets kleiner ist, als sie unter Voraussetzung der Homogenität sein würde. Da zudem ζ stets ein echter Bruch sein muss, so liegen alle möglichen Werthe der Abplattung zwischen p und $p \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}}$ oder $\frac{2}{5}p$. Ersterer Grenzwert wird erreicht, wenn ζ verschwindet, also für ein homogenes Ellipsoid; letzterer tritt ein für $\zeta = 1$. Dem Werthe 1 nähert sich aber ζ desto mehr, je mehr die Masse nach dem Mittelpunkte zu gedrängt ist, je kleiner also dem entsprechend die Dichtigkeit der oberflächlichen Schichten wird. Bemerken wir noch, dass nach §. 8 für die Erde p den Werth $\frac{1}{231}$ annimmt. Es folgt also nach dem Vorhergehenden, dass die Abplattung der als ursprünglich flüssig vorausgesetzten Erde zwischen $\frac{1}{231}$ und $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{231}$ oder $\frac{1}{577}$ liegen muss, wie denn in der That die Beobachtungen etwa $\frac{1}{299}$ ergeben haben.

Eine weitere Anwendung der vorstehenden Ergebnisse besteht in Folgendem. Nach dem Obigen erhält man sogleich nachstehende Gleichung:

$$\zeta = \frac{2}{3} \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right).$$

Indem man für ζ seinen Werth setzt, findet man weiter:

$$\begin{aligned} 16) \quad \int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2] &= \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right) \right\} \int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e_1^2] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right) M_1 e_1^2, \end{aligned}$$

unter M_1 wie vorhin die Masse der rotirenden Flüssigkeit verstanden. Endlich ist also auch:

$$\frac{4}{3}\pi \int_0^{c_1} \varrho d[c^3 e^2] = \frac{1}{3} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right) M_1 e_1^2.$$

Nach §. 14. 1 ist aber der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung in die bei der Theorie der Präcession und Nutation angewandte und in §. 6 aus unsern Principien unter Voraussetzung der Homogenität des angezogenen Ellipsoides abgeleitete Formel statt $M_1 e_1^2$ einzusetzen, wenn man diese Voraussetzung fallen lässt. Es zeigt also vorstehende Gleichung, wie dieser Ausdruck gefunden werden kann, wenn nur die Gestalt des angezogenen Ellipsoides eine den hydrostatischen Gesetzen genügende ist. Speciell für die Erde erhalten wir demgemäss folgende Formel für das Moment des Gegenpaares, welches ein weit entfernter anziehender Punkt (der Mond und die Sonne) an derselben hervorbringt:

$$\frac{3}{5} M_1 m f e_1^2 \cdot \frac{1}{3} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right) \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^3},$$

wo m , r , φ dieselbe Bedeutung haben, wie in §. 6. Der hinzugekommene Factor $\frac{1}{3} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right)$ nimmt für $p_1 = \frac{1}{299}$ den Werth 0,80 an; setzt man $p_1 = \frac{1}{292}$, wie im folgenden Paragraph aus den Aenderungen der Schwere an der Erdoberfläche abgeleitet werden wird, so erhält derselbe den Werth 0,82.

Bemerkung. Zur Vergleichung der bisherigen Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten der Laplace'schen Theorie diene Folgendes. Laplace nimmt für den Radiusvector r der einzelnen homogenen Schicht der rotirenden

Masse folgende nach den Kugelfunctionen Y geordnete Reihe an:

$$r = a(1 + \alpha Y^{(0)} + \alpha Y^{(1)} + \alpha Y^{(2)} + \dots),$$

wo a irgend einen Radiusvector der betreffenden Schicht und α einen kleinen Coefficienten bedeutet. Versteht man unter a den Halbmesser einer Kugel von gleichem Volumen und nimmt an, dass der Ursprung mit dem gemeinsamen Schwerpunkte aller Schichten zusammenfalle, so verschwinden $Y^{(0)}$ und $Y^{(1)}$; ebenso verschwinden, wie die Theorie ergibt, alle Kugelfunctionen, deren Ordnung die zweite übersteigt, wenn keine äussern Massen auf das rotirende Sphäroid anziehend wirken. Wir haben also dann zu setzen:

$$r = a(1 + \alpha Y^{(2)}).$$

Die allgemeine Gleichung, welche Laplace für die Kugelfunction $Y^{(i)}$ aufstellt *), geht für $i = 2$ in die folgende über:

$$\frac{4\pi a^2}{5} \int \varrho d[Y^{(2)}] - \frac{4\pi}{3a} Y^{(2)} \int \varrho d[a^3] + \frac{4\pi}{5a^3} \int \varrho d[a^5 Y^{(2)}] + a^2 Z^{(2)} = 0,$$

wo das erste Integral von der betrachteten Schicht bis zur Oberfläche, die beiden andern vom Mittelpunkte bis zu der betrachteten Schicht auszudehnen sind; für $Z^{(2)}$ ist zu setzen **):

$$\alpha Z^{(2)} = -\frac{g}{2}(\mu^2 - \frac{1}{3}),$$

wo unter g und μ Laplace resp. die Centrifugalkraft in der Einheit der Entfernung von der Umdrehungsaxe und den Cosinus des Winkels ϑ versteht, den der Radiusvector mit der Umdrehungsaxe bildet. Die Attractionsconstante ist in obiger Gleichung in ϱ eingerechnet.

Um nun obige Laplace'sche Gleichung in unserer Bezeichnungsweise auszudrücken, haben wir nach dem Frühern zu setzen:

$$\begin{aligned} r &= c \left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \vartheta}{2c^2} \right) \\ &= c \left[1 + \frac{e^2}{3c^2} - \frac{e^2(\mu^2 - \frac{1}{3})}{2c^2} \right], \end{aligned}$$

*) Laplace, Mécanique céleste livre 3. nro. 29.

**) Laplace, Mécanique céleste livre 3. nro. 23.

woraus folgt:

$$a\alpha Y^{(2)} = -\frac{e^2(\mu^2 - \frac{1}{3})}{2c}.$$

Für die Laplace'sche Constante g haben wir offenbar θ^2 zu setzen. Hiernach geht die Gleichung für $Y^{(2)}$, wenn wir in derselben noch a mit c vertauschen, was bei der hier beabsichtigten Annäherung verstattet ist, nach Weglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $\frac{\mu^2 - \frac{1}{3}}{a}$ in die folgende über:

$$-\frac{2\pi c^2}{5} \int_0^c \varrho d\left[\frac{e^2}{c^2}\right] + \frac{2\pi e^2}{3c^3} \int_0^c \varrho d[c^3] - \frac{2\pi}{5c^3} \int_0^c \varrho d[c^3 e^2] - \frac{c^2 \theta^2}{2} = 0.$$

Diese Gleichung fällt aber offenbar mit der ersten der Gleichungen (14), wie sie oben von uns abgeleitet wurde, zusammen.

§. 16. Zusammenhang zwischen der Anziehung und der Abplattung an der Oberfläche der flüssigen Masse.

Wir wollen jetzt die Grösse der Anziehung oder Schwere *) ermitteln, welche in einem Punkte der Oberfläche der flüssigen Masse stattfindet, dabei aber voraussetzen, dass alle zur Sprache kommenden Ellipsoide Rotationsellipsoide seien, was dann stattfindet, wenn ein fester Kern in der Flüssigkeit entweder gar nicht vorhanden, oder derselbe doch nur aus solchen Schalen zusammengesetzt ist, welche von Rotationsellipsoiden begrenzt sind. Hierzu veranlasst uns besonders auch der Umstand, dass für die speciellen Verhältnisse der Erde bei dem gegenwärtigen Zustande der Kenntniss, die man von der Gestalt derselben hat, nur unter dieser Beschränkung eine Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit den Erfahrungsergebnissen möglich ist. Die Function U , deren partielle Differentialquotienten die Componenten der Schwere geben, besteht nun aus dem mit der Attractionsconstanten multiplicirten Potential des Systems

*) d. h. der gesammten, an einem Punkte der flüssigen Masse wirkenden Kraft, die Centrifugalkraft eingeschlossen.

und der von der Centrifugalkraft herrührenden Function $\frac{1}{2}\theta^2(x^2 + y^2)$. Demnach hat man für die Punkte der Oberfläche, wenn die frühern Bezeichnungen beibehalten werden:

$$U = \frac{1}{2}\theta^2(x^2 + y^2) + f\left\{\frac{M+A}{r} - \frac{1}{5} \cdot \frac{P+B}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P+B)(x^2 + y^2)}{r^5}\right\},$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$A = \frac{4}{3}\pi \int_{c_0}^{c_1} \rho d[c(c^2 + e^2)], \quad B = \frac{4}{3}\pi \int_{c_0}^{c_1} \rho d[c^3 e^2],$$

und noch bemerkt werden mag, dass die Grösse Q der frühern Formeln jetzt durch P ersetzt werden musste. Die Richtung der Schwere an der Oberfläche steht auf dieser in jedem Punkte senkrecht; um daher den ganzen Betrag derselben zu erhalten, müssten wir die Function U nach einer Normalen zur Oberfläche differentiiren. Wegen der Kleinheit der vorkommenden Excentricitäten können wir aber auch als Ausdruck der Gesamtwirkung den Differentialquotienten von U nach r nehmen. Zu dem Zwecke setzen wir in die obige Formel für U zunächst:

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi,$$

unter φ den Winkel des Radiusvector mit der Ebene des Aequators, oder, wie wir kurz sagen wollen, die geographische Breite des betrachteten Punktes verstanden. Dann kann man schreiben:

$$U = \frac{1}{2}\theta^2 r^2 \cos^2 \varphi + f\left\{\frac{M+A}{r} - \frac{1}{5} \cdot \frac{P+B}{r^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P+B)\cos^2 \varphi}{r^3}\right\}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach r :

$$\frac{dU}{dr} = \theta^2 r \cos^2 \varphi - f\left\{\frac{M+A}{r^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{P+B}{r^4} + \frac{9}{10} \cdot \frac{(P+B)\cos^2 \varphi}{r^4}\right\}.$$

In den ersten Gliedern der eingeklammerten Ausdrücke in diesen beiden Formeln ist zu setzen, da wir nur die Punkte der Oberfläche betrachten:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_1} - \frac{e_1^2 \cos^2 \varphi}{2c_1^3},$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} - \frac{e_1^2 \cos^2 \varphi}{c_1^4};$$

in allen andern Gliedern ist r einfach durch c_1 zu ersetzen. Dadurch erhält man:

$$U_{c_1} = \frac{1}{2}\theta^2 c_1^2 \cos^2 \varphi + f \left\{ \frac{M+A}{c_1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{P+B}{c_1^3} - \frac{(M+A)e_1^2 \cos^2 \varphi}{2c_1^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P+B) \cos^2 \varphi}{c_1^3} \right\},$$

$$\left(\frac{dU}{dr} \right)_{c_1} = \theta^2 c_1 \cos^2 \varphi - f \left\{ \frac{M+A}{c_1^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{P+B}{c_1^4} - \frac{(M+A)e_1^2 \cos^2 \varphi}{c_1^4} + \frac{9}{10} \cdot \frac{(P+B) \cos^2 \varphi}{c_1^4} \right\}.$$

Die Bedingung, dass U_{c_1} constant sein muss, ergibt die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2}\theta^2 c_1^2 \cos^2 \varphi + f \left\{ -\frac{(M+A)e_1^2 \cos^2 \varphi}{2c_1^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{(P+B) \cos^2 \varphi}{c_1^3} \right\}.$$

Addirt man diese Gleichung, nachdem dieselbe mit $\frac{3}{c_1}$ multiplicirt worden ist, zur vorhergehenden, so erhält man:

$$\left(\frac{dU}{dr} \right)_{c_1} = \frac{5}{2}\theta^2 c_1 \cos^2 \varphi - f \left\{ \frac{M+A}{c_1^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{P+B}{c_1^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(M+A)e_1^2 \cos^2 \varphi}{c_1^4} \right\}.$$

Bezeichnen wir nun den absoluten Werth der Schwere in irgend einem Punkte der Oberfläche mit g , den für die Pole geltenden mit g_p , jenen am Aequator mit g_q , so ist offenbar:

$$g = -\left(\frac{dU}{dr} \right)_{c_1},$$

und die vorhergehende Formel lässt ersehen, dass man, unter m und n gewisse Constanten verstanden, setzen darf:

$$g = m + n \cos^2 \varphi.$$

Der Werth der Constanten m und n ist aber, wie sogleich erhellt, resp. g_p und $-(g_p - g_q)$. Vergleicht man jetzt die Formel:

$$g = g_p - (g_p - g_q) \cos^2 \varphi$$

mit der oben für $\left(\frac{dU}{dr} \right)_{c_1}$ aufgestellten, so ergeben sich sogleich folgende zwei Gleichungen:

$$g_p = \frac{(M+A)f}{c_1^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{(P+B)f}{c_1^4},$$

$$g_p - g_q = \frac{5}{2}\theta^2 c_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M+A)e_1^2 f}{c_1^4}.$$

Hieraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Werthe der Abplattung und der Aenderung der Schwere an der Oberfläche. Da nämlich die Abplattung p_1 der Oberfläche $= \frac{1}{2} \cdot \frac{e_1^2}{c_1^2}$ ist, so gibt die letzte Gleichung:

$$17) \quad p_1 = \frac{\frac{5}{2}\theta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{\frac{(M + A)f}{c_1^2}}.$$

Die hier auftretende Constante $\theta^2 c_1$ fällt bei der hier immer nur beabsichtigten Annäherung mit dem Werthe der Centrifugalkraft am Aequator zusammen, und der Nenner des vorstehenden Ausdruckes stellt die Anziehung dar, die ein Punkt der Oberfläche erleiden würde, wenn die Masse $M + A$ des ganzen Systemes eine Kugel vom Radius c_1 gleichförmig erfüllte. Dem Character der ganzen Untersuchung gemäss kann man für diesen Nenner an und für sich jeden beliebigen Werth der Anziehung in irgend einem Punkte der Oberfläche der rotirenden Flüssigkeit setzen; die dadurch herbeigeführten Unterschiede sind immer nur von derselben Ordnung, wie die vierte Potenz der Excentricität, die wir überall vernachlässigt haben. Uebrigens liefert die erste der obigen Gleichungen:

$$\frac{(M + A)f}{c_1^2} = g_p + \frac{3}{5} \cdot \frac{(P + B)f}{c_1^4}.$$

Setzt man daher g_p für den Nenner in Gleichung (17), so wird derselbe sicher zu klein, der Werth der Abplattung also zu gross. Ersetzt man g_p in voriger Formel mittelst der zweiten der obigen Gleichungen durch g_q , so kommt:

$$\frac{(M + A)f}{c_1^2} = g_q + \frac{5}{2}\theta^2 c_1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{(P + B)f}{c_1^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M + A)e_1^2 f}{c_1^4}.$$

Da die zwei letzten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung von derselben Grössenordnung und entgegengesetztem Vorzeichen sind, so scheint es, dass man beide gegen einander mit dem verhältnissmässig geringsten Fehler vernachlässigen kann und dann nimmt die Formel für die Abplattung die nachfolgende Gestalt an:

$$18) \quad p_1 = \frac{\frac{5}{2}\theta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{g_q + \frac{5}{2}\theta^2 c_1}.$$

Setzt man für den Nenner einfach g_q , so hat man die Formel, wie sie von Clairaut zuerst aufgestellt wurde, nach welcher die Abplattung vermehrt um den Quotienten aus dem Ueberschuss der Schwere an den Polen über jene am Aequator und der Schwere am Aequator gleich ist dem $2\frac{1}{2}$ -fachen des Quotienten aus der Centrifugalkraft am Aequator und der Schwere am Aequator. Dieser Satz gibt aber jedenfalls die Abplattung etwas zu gross, da auch, wenn man das grössere g_p statt des Nenners setzt, nach Obigem der resultirende Werth von p_1 noch zu gross ausfällt. Das durch obige Formel (18) ausgedrückte Resultat, dass man die Abplattung des rotirenden Ellipsoides, speciell also der Erde, berechnen kann, wenn man bloss die Anziehung an der Oberfläche kennt, ohne dass man dabei die Vertheilung der Masse im Innern desselben zu kennen braucht, ist jedenfalls das wichtigste aus der ganzen in Rede stehenden Theorie. Sehen wir darum, welcher Werth für die Abplattung der Erde sich aus (18) ergibt. Nach Schmidt *) ist die Länge des Secundenpendels in englischen Zollen an den Polen 39,218131, am Aequator 39,015233. Berechnet man hieraus die Werthe für die Beschleunigung der Schwere in Metern, so kommt, da ein englischer Fuss = 0,3047945 Meter ist:

$g_p = 9,831328$, $g_q = 9,780473$.
Der Werth für θ ist schon in §. 8 angegeben worden und für c_1 können wir zweckmässig setzen: $\frac{20000000}{\pi}$ Meter. Dadurch erhält man:

$$\theta^2 c_1 = 0,033852,$$

$$\frac{5}{2} \theta^2 c_1 - (g_p - g_q) = 0,03377.$$

Aus der Formel (18) findet sich nun:

$p_1 = \frac{1}{292}$.
Nimmt man nach Clairaut bloss g_q statt des Nenners, so findet sich der Werth $\frac{1}{290}$ für die Abplattung. Es kommt der aus den Pendelbeobachtungen berechnete Werth für

*) Schmidt, Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Th. I. §. 413.

diese Grösse dem von Bessel auf Grund der genauesten damals vorhandenen Gradmessungen direct gefundenen Werthe ($\frac{1}{299}$) so nahe, dass der Unterschied wohl als unerheblich bezeichnet werden kann, worin dann auch der Beweis liegt, dass in der That die feste Erdoberfläche, von localen Unregelmässigkeiten abgesehen, sich der rein sphäroidischen, dem hydrostatischen Gleichgewicht entsprechenden Gestalt trotz der vielen Veränderungen; die sie im Laufe der Zeit erlitten, auch jetzt noch sehr genau anschliesst.

Anmerkung. Als Werth der reinen Anziehung der Erde, mit Ausschluss der Centrifugalkraft, erhält man nach dem Obigen:

$$\frac{dV}{dr} = -f \left\{ \frac{M+A}{r^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{P+B}{r^4} + \frac{9}{10} \cdot \frac{P+B}{r^4} \cos^2 \varphi \right\}.$$

Für die Breite also, für welche

$$\cos^2 \varphi = \frac{2}{3} \text{ oder } \sin^2 \varphi = \frac{1}{3}$$

ist, erhält man demnach:

$$\frac{dV}{dr} = -f \cdot \frac{M+A}{r^2}.$$

Hieraus folgt, dass auf dem Parallelkreise, für welchen das Quadrat des Sinus der Breite den Werth $\frac{1}{3}$ hat, die reine Anziehung der Erde gerade so gross ist, als wenn letztere bei derselben Masse, die sie wirklich hat, genau kugelförmig wäre und zwar einen Halbmesser hätte, der dem Radius-vector des genannten Parallelkreises gleich käme.

§. 17. Ableitung einer Differentialgleichung, welche den Zusammenhang zwischen der Dichtigkeitsvertheilung im Innern der flüssigen Masse und der Abplattung ihrer einzelnen Schichten angibt.

Es sollen jetzt zunächst die Bedingungsgleichungen, denen nach §. 15 die Excentricitäten aller einzelnen Flüssigkeitsschichten genügen müssen, umgeformt werden. Setzen wir, um statt der Excentricitäten die Abplattungen einzuführen, p statt $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{c^2}$, so geht nach Division mit c^5 die erste der Gleichungen (12) in §. 15 in die nachstehende über:

$$\frac{\theta^2}{4\pi f} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{c^5} \int_{c_0}^c \varrho d[c^5 p] + \frac{2}{5} \int_c^{c_1} \varrho dp + \frac{1}{5} \cdot \frac{P}{\frac{4}{3}\pi c^5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{c^3} \int_{c_0}^c \varrho d[c^3] - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{c^3} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} = 0.$$

Durch Ausführung der unter den Integralzeichen angedeuteten Differentiationen erhält man hieraus:

$$\frac{\theta^2}{8\pi f} + \frac{1}{c^5} \int_{c_0}^c \varrho c^4 p dc + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{c^5} \int_{c_0}^c \varrho c^5 \frac{dp}{dc} \cdot dc + \frac{1}{5} \int_c^{c_1} \varrho \frac{dp}{dc} \cdot dc + \frac{1}{10} \cdot \frac{P}{\frac{4}{3}\pi c^5} - \frac{p}{c^3} \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc - \frac{p}{c^3} \cdot \frac{M}{4\pi} = 0.$$

Diese Gleichung, in der wir ϱ und p als Functionen von c ansehen, differentiiren wir jetzt nach c , wobei zu beachten, dass in den Integralen diese Variabele nur als Grenze auftritt; dann erhalten wir:

$$-\frac{5}{c^6} \int_{c_0}^c \varrho c^4 p dc - \frac{1}{c^6} \int_{c_0}^c \varrho c^5 \frac{dp}{dc} dc - \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\frac{4}{3}\pi c^6} + \frac{3p}{c^4} \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc - \frac{1}{c^3} \cdot \frac{dp}{dc} \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc + \frac{p}{c^4} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} - \frac{1}{c^3} \cdot \frac{dp}{dc} \cdot \frac{M}{4\pi} = 0.$$

Die letzte Gleichung multipliciren wir zunächst mit c^6 und differentiiren dieselbe zum zweiten Male nach c ; dadurch erhalten wir:

$$-5\varrho c^4 p - \varrho c^5 \frac{dp}{dc} + 6pc \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc + 3\varrho pc^4 - c^3 \frac{d^2 p}{dc^2} \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc - \varrho c^5 \frac{dp}{dc} + 2pc \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} - \frac{c^3}{3} \cdot \frac{d^2 p}{dc^2} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} = 0.$$

Nach gehöriger Ordnung nimmt diese Differentialgleichung, in der p jetzt nicht mehr unter einem Integralzeichen vorkommt, folgende Gestalt an:

$$19) \quad \frac{d^2 p}{dc^2} + \frac{2\varrho c^2}{\frac{M}{4\pi} + \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc} \cdot \frac{dp}{dc} + 2 \left(\frac{\varrho c}{\frac{M}{4\pi} + \int_{c_0}^c \varrho c^2 dc} - \frac{3}{c^2} \right) p = 0.$$

Diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt die Abplattung p jeder Schicht als Function des Polarhalbmessers c erkennen, sobald ϱ als Function von c gegeben ist, sobald also die Dichtigkeitsvertheilung im Innern der flüs-

sigen Masse bekannt ist. Ganz dieselbe Gleichung findet man für die Abplattung $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{c^2}$ des zweiten Hauptschnittes, so dass also die Abplattungen der einzelnen Hauptschnitte durch dieselbe Function von c dargestellt werden und sich nur durch die verschiedenen Werthe der in diese Function eingehenden Constanten unterscheiden. Es rührt dieses aber daher, dass aus der obigen Differentialgleichung die die beiden Hauptschnitte unterscheidenden Constanten P und Q ausgefallen sind.

Fehlt der feste Kern, ist also die ganze Masse flüssig und zeigt demnach die Gestalt eines Umdrehungsellipsoides, so geht die Gleichung, welche die Abplattung der einzelnen Schichten als Function des Polarhalbmessers derselben gibt, in die folgende über:

$$20) \quad \frac{d^2p}{dc^2} + \frac{2\rho c^2}{\int_0^c \rho c^2 dc} \cdot \frac{dp}{dc} + 2 \left(\frac{\rho c}{\int_0^c \rho c^2 dc} - \frac{3}{c^2} \right) p = 0.$$

Diese letztere Differentialgleichung findet sich auch bei Laplace in fast ganz gleicher Gestalt (Méc. cél. l. 3. nro. 30).

§. 18. Integration der vorhergehenden Differentialgleichung.

Die vorher gefundene lineare Differentialgleichung für p wird integrabel, sobald ρ als Function von c gegeben ist. Da nun aber speciell für die Erde die Beziehung zwischen ρ und c nicht a priori bekannt ist, so bleibt nichts Anderes übrig, als versuchsweise Annahmen über die Dichtigkeitsänderung im Innern derselben zu machen. Für einige derartige Hypothesen wollen wir im Nachfolgenden die Integration der in Rede stehenden Differentialgleichung ausführen. Dabei lassen wir aber die Annahme eines festen Kernes ganz fallen, berücksichtigen also nur die zu Ende des vorigen Paragraph aufgestellte einfachere Gleichung:

$$\frac{d^2p}{dc^2} + \frac{2\rho c^2}{\int_0^c \rho c^2 dc} \cdot \frac{dp}{dc} + 2 \left(\frac{\rho c}{\int_0^c \rho c^2 dc} - \frac{3}{c^2} \right) p = 0.$$

Wir schicken die folgenden vorläufigen Bemerkungen voraus. Die Annahmen, die wir für ρ machen werden, haben die gemeinsame Form:

wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ irgend welche Constanten und $s, t, \dots$ sämmtlich positiv sind. In den von uns behandelten Fällen wird sich dann zeigen, dass die zu integrirende Differentialgleichung ein particuläres Integral p' von folgender Form hat:

$$p' = C + C_1 c^m + C_2 c^n + \dots,$$

wo $m, n, \dots$ sämmtlich wieder positiv sind. Bezeichnet nun p'' das zweite particuläre Integral, so hat das allgemeine Integral, weil die Differentialgleichung linear ist und kein von p unabhängiges Glied enthält, die Form:

$$p = \mathfrak{C}' p' + \mathfrak{C}'' p'',$$

unter $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ die beiden Integrationsconstanten verstanden. Nun lässt sich aber das zweite particuläre Integral aus dem ersten finden:

$$\frac{p''}{p'} = \int \frac{dc}{(C + C_1 c^m + C_2 c^n + \dots)^2} e^{-\int_0^c \frac{2\varrho c^2 dc}{\int_0^c \varrho c^2 dc}},$$

oder wenn wir unter Voraussetzung kleiner c überall Reihenentwickelungen eintreten lassen:

$$\begin{aligned} \frac{p''}{p'} &= \int dc \left(\frac{1}{C^2} - \frac{2C_1}{C^3} c^m + \dots \right) e^{-\int \frac{2c^2(\alpha - \beta c^s - \dots)dc}{\frac{\alpha}{3}c^3 - \frac{\beta}{s+3}c^{s+3} - \dots}} \\ &= \int dc \left(\frac{1}{C^2} - \frac{2C_1}{C^3} c^m + \dots \right) e^{-\int dc \left[\frac{6}{c} - \frac{6\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{3}{s+3} \right) c^{s-1} + \dots \right]} \\ &= \int dc \left(\frac{1}{C^2} - \frac{2C_1}{C^3} c^m + \dots \right) e^{-6 \log c + \frac{6\beta}{\alpha s} \left(1 - \frac{3}{s+3} \right) c^s + \dots} \\ &= \int dc \left(\frac{1}{C^2} - \frac{2C_1}{C^3} c^m + \dots \right) \cdot \frac{1}{c^6} \left[1 + \frac{6\beta}{\alpha s} \left(1 - \frac{3}{s+3} \right) c^s + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{5C^2} \cdot \frac{1}{c^5} + \dots \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass die Abplattung, welche das zweite particuläre Integral für die centralen Schichten liefert, unendlich gross wird. Da dieses aber nicht möglich ist, so ist das zweite particuläre Integral als unbrauchbar zu ver-

stante. Demgemäss haben wir die folgende Entwicklung der Abplattung p nach dem Polarhalbmesser c :

$$p = C \left\{ 1 + \frac{1}{4}\alpha c + \frac{15}{112}(\alpha c)^2 + \frac{75}{896}(\alpha c)^3 + \frac{150}{2688}(\alpha c)^4 + \dots \right\}.$$

Da, wie aus der allgemeinen Formel für C_m hervorgeht, die Coefficienten dieser Reihe fortwährend mit steigendem Index abnehmen, und da andererseits nach der angenommenen Formel für die Dichtigkeitsvertheilung selbst für die Punkte der Oberfläche αc noch immer unter Eins liegen muss, so ist klar, dass die obige Reihe für jeden Punkt innerhalb des Ellipsoides convergirt. C bedeutet die Abplattung der centralen Schichten, und da offenbar alle Coefficienten der Reihe stets positiv sein müssen, so erhellt, dass unter der gemachten Annahme über die Dichtigkeitsvertheilung die Abplattung in den centralen Schichten am kleinsten ist, ohne jedoch hier zu verschwinden, und dass dieselbe mit wachsender Entfernung vom Mittelpunkte fortwährend zunimmt, um in der Oberfläche ihren grössten Werth zu erreichen. Dass die Abplattung im Mittelpunkte nicht den Werth Null erlangen kann, geht daraus hervor, dass dann die Constante C gleich Null und in Folge dessen auch p für jedes c gleich Null sein müsste.

2) Setzt man allgemeiner:

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha c - \beta c^2),$$

wo α und β wieder positive Constanten sein sollen, so wird:

$$\int_0^c \varrho c^2 dc = \varrho_0 c^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha c - \frac{1}{5}\beta c^2 \right),$$

und die zu integrirende Differentialgleichung geht in die folgende über:

$$\frac{d^2 p}{dc^2} + \frac{2(1 - \alpha c - \beta c^2)}{c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha c - \frac{1}{5}\beta c^2 \right)} \cdot \frac{dp}{dc} + 2 \left(\frac{1 - \alpha c - \beta c^2}{c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha c - \frac{1}{5}\beta c^2 \right)} - \frac{3}{c^2} \right) p = 0,$$

oder nach Multiplication mit $c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha c - \frac{1}{5}\beta c^2 \right)$:

$$c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha c - \frac{1}{5}\beta c^2 \right) \frac{d^2 p}{dc^2} + 2c(1 - \alpha c - \beta c^2) \frac{dp}{dc} - \left(\frac{1}{2}\alpha c + \frac{4}{5}\beta c^2 \right) p = 0.$$

Wir setzen nun wieder:

$$p = C + C_1 c + C_2 c^2 + C_3 c^3 + \dots + C_{m-1} c^{m-1} + C_m c^m + \dots$$

und erhalten nach gehöriger Substitution zur Bestimmung der Coefficienten C die folgenden Gleichungen:

$$2C_1 - \frac{1}{2}C\alpha = 0,$$

$$\frac{2}{3}C_2 + 4C_2 - 2C_1\alpha - \frac{1}{2}C_1\alpha - \frac{4}{5}C\beta = 0,$$

$$\frac{(m-1)mC_m}{3} - \frac{(m-2)(m-1)C_{m-1}\alpha}{4} - \frac{(m-3)(m-2)C_{m-2}\beta}{5} \\ + 2mC_m - 2(m-1)C_{m-1}\alpha - 2(m-2)C_{m-2}\beta - \frac{1}{2}C_{m-1}\alpha \\ - \frac{4}{5}C_{m-2}\beta = 0.$$

Also ist:

$$C_1 = \frac{1}{4}C\alpha, \quad C_2 = \left(\frac{6}{35}\beta + \frac{15}{112}\alpha^2\right)C, \quad \dots\dots,$$

allgemein:

$$C_m = 3\left\{C_{m-1}\alpha\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{m(m+5)}\right] + C_{m-2}\beta\left[\frac{1}{5} - \frac{2}{m(m+5)}\right]\right\}.$$

Alle Coefficienten der Reihe werden offenbar positiv. Jedes Glied $C_m c^m$ besteht aus einem Aggregat von Potenzen und Producten der Ausdrücke αc und βc^2 . C bedeutet wie vorhin die Abplattung der centralen Schichten, und das in Nro. 1 über das Wachsen der Abplattung nach der Oberfläche hin Gesagte gilt auch hier. Für $\beta = 0$ reduciren sich natürlich die hier gegebenen Ausdrücke auf die entsprechenden in Nro. 1.

3). Machen wir endlich, unter n eine positive Grösse verstanden, noch die Annahme:

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha c^n),$$

welche für $n = 1$ wieder auf diejenige in Nro. 1 zurückkommt, so erhalten wir zunächst:

$$\int_0^c \varrho c^2 dc = \varrho_0 c^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha c^n}{n+3} \right),$$

und die zu integrirende Differentialgleichung stellt sich jetzt so dar:

$$\frac{d^2 p}{dc^2} + \frac{2(1 - \alpha c^n)}{c \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha c^n}{n+3} \right)} \cdot \frac{dp}{dc} + 2 \left[\frac{1 - \alpha c^n}{c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha c^n}{n+3} \right)} - \frac{3}{c^2} \right] p = 0,$$

oder nach Multiplication mit $c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha c^n}{n+3} \right)$:

$$c^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha c^n}{n+3} \right) \frac{d^2 p}{dc^2} + 2c(1 - \alpha c^n) \frac{dp}{dc} - \frac{2\alpha n c^n}{n+3} p = 0.$$

Versuchen wir dieser Gleichung durch einen Ausdruck von folgender Form zu genügen:

$$p = C + C_1 c^n + C_2 c^{2n} + C_3 c^{3n} + C_4 c^{4n} + \dots$$

Die durch Substitution dieser Reihe in die vorstehende Dif-

muss auch der Quotient $\frac{3\alpha c^n}{n+3}$ für alle Punkte der Masse, diejenigen der Oberfläche mit eingeschlossen, kleiner als Eins sein; ebenso sind auch alle Coefficienten der Reihe für p , wie sogleich aus dem Ausdrucke für C_m folgt, kleiner als Eins. Die Convergenz der gefundenen Reihe für alle in Betracht kommenden Werthe von c kann demnach nicht zweifelhaft sein. Da offenbar alle Glieder derselben Reihe auch immer positiv sind, so folgt, dass das unter Nro. 1 über die Zunahme der Abplattung nach der Oberfläche hin Gesagte auch bei der jetzigen Annahme über die Dichtigkeitsvertheilung gilt: Die Abplattung der centralen Schichten ist ein Minimum, ohne zu verschwinden; nach der Oberfläche hin nimmt die Abplattung stetig zu.

Es lässt sich dieser Satz aber auch unabhängig von jeder Hypothese über die Dichtigkeitsvertheilung nachweisen. Für kleine Werthe von c nämlich, also für die dem Mittelpunkte zunächst liegenden Schichten, wird man jedenfalls, da man sich die Dichtigkeit ϱ in eine nach Potenzen von c fortschreitende Reihe entwickelt denken kann, als genäherten Ausdruck für die Dichtigkeitsvertheilung die Formel

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha c^n)$$

aufzustellen berechtigt sein, indem man für kleine c von jener Entwicklung nur das constante und das erste c enthaltende Glied beizubehalten braucht. Daraus folgt aber nach dem Vorhergehenden, dass jedenfalls für die innersten Schichten die Abplattung mit wachsender Entfernung vom Mittelpunkte zunimmt. Nehmen wir nun an, diese Zunahme ginge nur bis zu einer gewissen Schicht, worauf für die folgenden Schichten wieder eine Abnahme einträte, so müsste p für ein gewisses c einen Maximalwerth erreichen, für dieses c also $\frac{dp}{dc}$ verschwinden und $\frac{d^2p}{dc^2}$ negativ sein. Das ist aber nicht möglich, wie sich aus der Differentialgleichung (20), die zur Bestimmung von p diente, zeigen lässt. Für jenes c ergibt diese nämlich, da $\frac{dp}{dc}$ verschwinden soll:

$$\frac{d^2p}{dc^2} = 2 \left(\frac{3}{c^2} - \frac{\rho c}{\int_0^c \rho c^2 dc} \right) p.$$

Nun finden wir aber durch theilweise Integration:

$$\int_0^c \rho c^2 dc = \frac{1}{3} \rho c^3 - \frac{1}{3} \int_0^c c^3 \frac{d\rho}{dc} dc,$$

und daher wird die vorhergehende Gleichung nach leichter Umformung:

$$\frac{d^2p}{dc^2} = 2 \left(\frac{3}{c^2} - \frac{3}{c^2 - \frac{\int_0^c c^3 \frac{d\rho}{dc} dc}{\rho c}} \right) p.$$

Da nun, wenn die Dichtigkeit nach der Oberfläche zu abnimmt, $\frac{d\rho}{dc}$ immer negativ sein muss, so ergibt sich:

$$\frac{3}{c^2} > \frac{3}{c^2 - \frac{\int_0^c c^3 \frac{d\rho}{dc} dc}{\rho c}}.$$

Hieraus geht aber hervor, dass in den Punkten, wo $\frac{dp}{dc}$

verschwinden soll, $\frac{d^2p}{dc^2}$ nothwendig positiv sein müsste, so

dass also ein Maximalwerth für p gar nicht möglich ist. Wenn demnach p für kleine c eine wachsende Function ist, muss es diese Eigenschaft für alle c behalten. Damit ist der oben ausgesprochene Satz über die Zunahme der Abplattung nach der Oberfläche hin ganz unabhängig von jeder besondern Voraussetzung über die Art der Dichtigkeitsvertheilung bewiesen und allein an die Voraussetzung geknüpft, dass die Dichtigkeit nach der Oberfläche zu stetig abnimmt.

Auch Laplace spricht mehrfach von obigem Satze; in Nro. 30 des wiederholt angeführten dritten Buches der *Mécanique céleste* heisst es z.B.: »la figure de la Terre, supposée fluide, ne peut donc être que celle d'un ellipsoïde de révolution, dont toutes les couches de même densité sont elliptiques et de révolution, et dans lequel les ellipticités

croissent, et les densités diminuent du centre à la surface.«
Dass auch die centralen Schichten noch immer eine bestimmte Abplattung haben müssen, also nicht etwa kugelförmig sein können, hebt Laplace nicht bestimmt hervor.

§. 19. Bestimmung der Constanten in der Formel für die Dichtigkeitsvertheilung im Innern der rotirenden Masse.

Indem wir auch im Folgenden von der Annahme eines festen Kernes im Innern der rotirenden Masse abstrahiren, in Folge dessen also überall Rotationsellipsoide voraussetzen, wollen wir jetzt das Integral $\int_0^{c_1} \rho d[c^3 e^2]$, welches in der für die Abplattung gegebenen Formel (15) auftritt, unter Annahme des Ausdruckes:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha c^n)$$

für die Dichtigkeitsvertheilung näher entwickeln. Unter p wie vorhin die Abplattung und unter p_1 ihren Werth an der Oberfläche verstanden, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^{c_1} \rho d[c^3 c^2] &= 2\rho_0 \int_0^{c_1} (1 - \alpha c^n) d[c^5 p] \\ &= 2\rho_0 c_1^5 p_1 - 2\rho_0 \alpha \int_0^{c_1} c^n d[c^5 p]. \end{aligned}$$

Mittelst der im vorigen Paragraph aus der auch hier zu Grunde gelegten Annahme über die Dichtigkeitsvertheilung abgeleiteten Reihe (21) für p erhalten wir nun weiter:

$$\begin{aligned} \int_0^{c_1} c^n d[c^5 p] &= C \int_0^{c_1} c^n d \left\{ c^5 + \frac{2}{n+5} \cdot \frac{3\alpha}{n+3} c^{n+5} \right. \\ &\quad + \frac{3n+7}{(n+5)(2n+5)} \left(\frac{3\alpha}{n+3} \right)^2 c^{2n+5} \\ &\quad \left. + \frac{(3n+7)(8n+12)}{3(n+5)(2n+5)(3n+5)} \left(\frac{3\alpha}{n+3} \right)^3 c^{3n+5} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

oder nach gehöriger Ausführung der Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^{c_1} c^n d[c^5 p] &= C \left\{ \frac{5}{n+5} c_1^{n+5} + \frac{2}{2n+5} \cdot \frac{3\alpha}{n+3} c_1^{2n+5} \right. \\ &\quad + \frac{3n+7}{(n+5)(3n+5)} \left(\frac{3\alpha}{n+3} \right)^2 c_1^{3n+5} \\ &\quad \left. + \frac{(3n+7)(8n+12)}{3(n+5)(2n+5)(4n+5)} \left(\frac{3\alpha}{n+3} \right)^3 c_1^{4n+5} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter :

$$2\rho_0\alpha\int_0^{c_1}c^n d[c^5p] = 2\rho_0c_1^5C\left\{\frac{n+3}{3}\left\{\frac{5}{n+5}\cdot\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right.\right.$$

$$+\frac{2}{2n+5}\left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^2+\frac{3n+7}{(n+5)(3n+5)}\left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^3$$

$$\left.+\frac{(3n+7)(8n+12)}{3(n+5)(2n+5)(4n+5)}\left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^4+\dots\right\}.$$

Für die Constante C erhalten wir nach (21) folgenden Ausdruck:

$$C = \frac{p_1}{1 + \frac{2}{n+5} \cdot \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} + \frac{3n+7}{(n+5)(2n+5)} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^2 + \dots}.$$

Nehmen wir jetzt alles Vorhergehende zusammen, so können wir endlich den vollständig entwickelten Ausdruck des Integrales $\int_0^{c_1}\rho d[c^3e^2]$ hinschreiben; er heisst:

$$22) \int_0^{c_1}\rho d[c^3e^2] = 2\rho_0c_1^5p_1 \left\{1 - \frac{n+3}{3} \cdot \frac{5}{n+5} \cdot \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} + \frac{2}{2n+5} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^2 + \frac{3n+7}{(n+5)(3n+5)} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^3 + \dots \right\}$$

$$\left[1 + \frac{2}{n+5} \cdot \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} + \frac{3n+7}{(n+5)(2n+5)} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}\right)^2 + \dots \right]$$

Die Gleichung (16) gibt aber für dasselbe Integral, wenn wir die dortige Bezeichnung beibehalten:

$$\int_0^{c_1}\rho d[c^3e^2] = \frac{1}{4\pi} \left(5 - 2\frac{p}{p_1}\right) M_1 e_1^2.$$

Für M_1 oder die Gesamtmasse des rotirenden Körpers, sowie für e_1^2 setzen wir:

$$M_1 = \frac{4}{3}c_1^3\pi\rho_\mu, \quad e_1^2 = 2c_1^2p_1,$$

hierbei unter ρ_μ die mittlere Dichtigkeit der rotirenden flüssigen Masse verstanden; dadurch erhalten wir:

$$\int_0^{c_1}\rho d[c^3e^2] = \frac{2}{3}p_1c_1^5\rho_\mu \left(5 - 2\frac{p}{p_1}\right).$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der oben in (22) gegebenen finden wir, wenn wir ρ_μ , p , p_1 als bekannt an-

sehen dürfen, eine Beziehung zwischen den Constanten in der für die Dichtigkeit angenommenen Formel, nämlich:

$$\frac{n+3}{3} \cdot \frac{5}{n+5} \cdot \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} + \frac{2}{2n+5} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3} \right)^2 + \frac{3n+7}{(n+5)(3n+5)} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3} \right)^3 + \dots$$

$$1 + \frac{2}{n+5} \cdot \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} + \frac{3n+7}{(n+5)(2n+5)} \left(\frac{3\alpha c_1^n}{n+3} \right)^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\varrho_\mu}{\varrho_0} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right).$$

Eine weitere Beziehung zwischen den Constanten ϱ_0 , α , n ergibt sich, indem wir die Masse der rotirenden Flüssigkeit ausdrücken, wodurch man leicht erhält:

$$\varrho_0 \left(1 - \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} \right) = \varrho_\mu.$$

Eine dritte Gleichung endlich kann man aufstellen, wenn man auch noch die Dichtigkeit ϱ_1 an der Oberfläche der rotirenden Masse als bekannt ansieht, nämlich:

$$\varrho_0 (1 - \alpha c_1^n) = \varrho_1.$$

Die drei entwickelten Gleichungen können also dazu dienen, die drei Constanten ϱ_0 , α , n aus ϱ_1 , ϱ_μ , p , p_1 zu berechnen. Die zwei letzten Gleichungen ergeben zu dem Ende, unter

σ den Ausdruck $3 \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_\mu} \right)$ verstanden:

$$\frac{3\alpha c_1^n}{n+3} = \frac{\sigma}{n+\sigma}.$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$\frac{\varrho_\mu}{\varrho_0} = 1 - \frac{3\alpha c_1^n}{n+3} = \frac{n}{n+\sigma}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{3\alpha c_1^n}{n+3}$ und $\frac{\varrho_\mu}{\varrho_0}$ in die erste der drei obigen Gleichungen, so verwandelt sich diese in eine transcendente Gleichung mit der einen Unbekannten n , die wir in folgender Weise schreiben können:

$$23) \quad \frac{n+3}{3} \varphi(n) - \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(5 - 2 \frac{p}{p_1} \right) \frac{n}{n+\sigma} \right\} \psi(n) = 0,$$

wobei $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ zwei durch folgende Reihen definirte Functionen bedeuten:

$$\varphi(n) = \frac{5}{n+5} \cdot \frac{\sigma}{n+\sigma} + \frac{2}{2n+5} \left(\frac{\sigma}{n+\sigma} \right)^2 + \frac{3n+7}{(n+5)(3n+5)} \left(\frac{\sigma}{n+\sigma} \right)^3$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(3n+7)(8n+12)}{3(n+5)(2n+5)(4n+5)} \left(\frac{\sigma}{n+\sigma} \right)^4 + \dots, \\
 \psi(n) = & 1 + \frac{2}{n+5} \cdot \frac{\sigma}{n+\sigma} + \frac{3n+7}{(n+5)(2n+5)} \left(\frac{\sigma}{n+\sigma} \right)^2 + \\
 & + \frac{(3n+7)(8n+12)}{3(n+5)(2n+5)(3n+5)} \left(\frac{\sigma}{n+\sigma} \right)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Das Fortschritzungsgesetz dieser Reihen ist nach dem Früheren leicht zu erkennen. In denselben bedeutet σ eine nach dem Obigen als bekannt vorauszusetzende Constante. Wenn aus der Gleichung (23) n berechnet worden ist, so ergibt sich der Werth von αc_1^n leicht aus der Gleichung:

$$\alpha c_1^n = \frac{n+3}{3} \cdot \frac{\sigma}{n+\sigma};$$

wir wollen denselben mit γ bezeichnen. Endlich findet sich für ϱ_0 :

$$\varrho_0 = \varrho_\mu \cdot \frac{n+\sigma}{n}.$$

Somit sind dann alle Constanten in der Dichtigkeitsformel bestimmt und diese nimmt folgende Gestalt an:

$$\varrho = \varrho_0 \left[1 - \gamma \left(\frac{c_1}{c} \right)^n \right].$$

Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen beifügen über die Anwendung der vorhergehenden Ergebnisse auf die speciellen Verhältnisse der Erde. Zur Ausführung der im Vorhergehenden besprochenen Rechnungen, welche für die Aufstellung der Formel für die Vertheilung der Dichtigkeit im Innern der Erde erforderlich sind, müssen dem Obigen zufolge folgende Constanten bekannt sein: 1) die Abplattung p , welche die Erde im Falle der Homogenität zeigen würde; 2) die wirkliche Abplattung p_1 derselben; 3) ihre mittlere Dichtigkeit ϱ_μ ; 4) endlich die Dichtigkeit ϱ_1 an der Oberfläche derselben. Den Werth der ersten Constante, der Abplattung der Erde im Falle der Homogenität, haben wir in §. 8 gegeben; er beträgt $\frac{1}{231}$. Die zweite Constante, die wirkliche Abplattung der Erde, kann nur als beiläufig bekannt gelten; nach dem Obigen (§. 16) ist der auf Grund der Pendelbeobachtungen theoretisch bestimmte Werth derselben $\frac{1}{292}$, während die zuletzt auf Grund der besten geo-

dätischen Messungen von Bessel ausgeführte directe Berechnung den Werth $\frac{1}{299}$ ergeben hat. Was weiter die dritte Constante, die mittlere Dichtigkeit der Erde betrifft, so zeigen auch hier die Ergebnisse verschiedener Bestimmungsversuche nicht unerhebliche Schwankungen. Die ältesten, weniger zuverlässigen Bestimmungen von Maskelyne ergaben für die mittlere Dichtigkeit der Erde den Werth 5; die Versuche von Cavendish mittelst der Drehwage führten zu dem Resultate 5,48, während die in neuerer Zeit von Reich und Baily nach derselben Methode mit der grössten Umsicht angestellten Versuche im Mittel resp. die Werthe 5,58 und 5,67 ergeben haben; in der letzten Zeit hat endlich Airy nach einem neuen Verfahren einen beträchtlich grössern Werth, nämlich 6,57, erhalten. Dieselbe Unsicherheit gilt endlich auch von der letzten Constante, von der Dichtigkeit der an der Oberfläche gelegenen Schichten der Erde; die Mittelwerthe, welche man hierfür angegeben findet, schwanken zwischen den Grenzen 2 bis 3. Auch kann es vielleicht als zweifelhaft erscheinen, ob wirklich die jetzigen äussersten Erdschichten, welche einzig bekannt sind, dieselbe mittlere Dichtigkeit haben, wie sie in dem vorausgesetzten flüssigen Zustande der Erde an deren Oberfläche herrschte, indem die äussern Schichten der jetzigen festen Erdrinde wenigstens zum grossen Theile doch nur das Product späterer Bildungen sind. Aus Allem scheint also hervorzugehen, dass, abgesehen von der Ungewissheit, die aus der hypothetischen Annahme der Form des Ausdruckes für die Dichtigkeitsvertheilung im Innern der Erde entspringt, ein sehr zuverlässiges Resultat in der vorliegenden Frage wegen der Ungewissheit der der Rechnung zu Grunde zu legenden Constanten nicht zu erwarten ist. Es wäre freilich interessant, ein System von Werthen für die Constanten n , ρ_0 , γ zu kennen, wie sie sich aus verschiedenen Annahmen über p_1 , ρ_μ , ρ_1 ergeben; indessen ist die Berechnung besonders wegen der Auflösung der transcendenten Gleichung (23) von grosser Weitläufigkeit. Angefangene Rechnungen in dieser Richtung schienen das Resultat zu ergeben, dass eine kleine Aenderung in dem für die Abplattung p_1 angenommenen Werthe eine viel beträchtlichere Verschiebung

des Werthes für n und demzufolge eine noch weit grössere des Werthes für ρ_0 nach sich zieht.

Es soll daher hier nur das Resultat angeführt werden, welches Prof. Lipschitz, der in einer Abhandlung (Crelle's Journal Bd. 62 S. 1 ff.) im Anschlusse an die Laplace'sche Theorie die Frage nach der Dichtigkeitsvertheilung im Innern der Erde behandelte, für eine bestimmte Annahme der Constanten berechnet hat. Derselbe setzte nach Reich für die mittlere Dichtigkeit der Erde 5,5832, für die mittlere Dichtigkeit derselben an der Oberfläche nach Naumann 2,5; statt der Abplattung legte er die Werthe für die Länge des Sekundenpendels der Rechnung zu Grunde, und zwar dieselben, welche in §. 16 auch von uns nach Schmidt benutzt worden sind. Unter diesen Annahmen fand er dann, dass sich die Dichtigkeitsvertheilung im Innern der Erde durch folgende Formel darstellen lässt:

$$\rho(b) = 9,453 - 6,953 \left(\frac{b}{c} \right)^{2,39},$$

unter b den Abstand der betreffenden Schicht vom Mittelpunkte und unter c den mittleren Erdhalbmesser verstanden. In unserer Bezeichnungsweise müsste diese Formel folgendermassen geschrieben werden:

$$\rho = 9,453 \left[1 - 0,736 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{2,39} \right].$$

Wenn die Constanten in der Dichtigkeitsformel bekannt sind, so lässt sich aus dem Werthe der Abplattung an der Oberfläche der Erde auch leicht finden, wie gross die Abplattung der dem Mittelpunkte zunächst liegenden Schichten ist. Setzt man z. B. nach der vorstehenden Formel $n = 2,39$, $\alpha c_1^n = 0,736$, so ergibt die Reihe in (21), wenn man in ihr c_1 für c setzt, bei wirklicher Berechnung:

$$p_1 = C \cdot 1,162.$$

Hieraus folgt für C , d. i. für die Abplattung der centralen Schichten der Erde, jenachdem man für die Abplattung p_1 an der Oberfläche den Werth $\frac{1}{299}$ oder $\frac{1}{292}$ setzt:

$$C = \frac{1}{347} \text{ oder } C = \frac{1}{339}.$$

V i t a.

Geboren wurde ich am 17. April 1839 zu Brand, einem Dorfe bei Aachen. Die Gymnasialstudien machte ich in Aachen, von Ostern 1851 bis Herbst 1857. Nach dem Abgange vom dortigen Gymnasium widmete ich mich zuerst der Technik und arbeitete demgemäss bis Herbst 1858 in einer Maschinenbau-Werkstätte. Ich verliess dann dieses Fach und begab mich in demselben Herbste an die Bonner Universität, an welcher ich mich bis Herbst 1862 mit theologischen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien beschäftigte. In ein näheres freundschaftliches Verhältniss trat ich während dieser Zeit besonders zu den damaligen Professoren der Mathematik und Physik, A. Beer und J. Plücker, die jetzt schon beide durch den Tod den Wissenschaften entrissen sind. Nachdem ich vor dem Abgange von der Universität das Examen pro facultate docendi in der Mathematik und den Naturwissenschaften bestanden hatte, trat ich im Herbste 1862 in das erzbischöfliche Priesterseminar in Cöln. Im folgenden Herbste 1863 wurde ich nach empfangener Priesterweihe aus demselben wieder entlassen und zur Errichtung einer höhern Bürgerschule nach Düren berufen, welche Anstalt ich von da an bis Ostern 1869 leitete. Vielseitigen Wünschen entsprechend legte ich dann meine Stelle nieder und begab mich, einer ehrenvollen Einladung der hiesigen academischen Behörden folgend, wieder nach Bonn, in der Absicht, mich als Docent zu habilitiren.

Thesen.

- 1) Das Resultat, welches Airy aus der beobachteten Aenderung der Schwere am Boden eines tiefen Schachtes für die mittlere Dichtigkeit der Erde abgeleitet hat, scheint weniger zuverlässig, als die mittelst der Drehwage erhaltenen.
 - 2) Die Ableitung der Formel für das Torsionsmoment eines Kreiscylinders aus der Längendilatation der der Axe parallelen Fasern, wie sie sich zuweilen in technischen Lehrbüchern der Mechanik findet (s. z. B. das Lehrbuch von Weisbach, 3. Aufl., I. Theil §. 236), widerstreitet den Principien der Elasticitätstheorie.
 - 3) Die Plateau'schen Versuche mit einem dem Einflusse der Schwere entzogenen rotirenden Oeltropfen dürfen nicht als Stütze irgend welcher Hypothesen über die Bildung unseres Planetensystems betrachtet werden.
 - 4) Das Gleichgewicht einer über einem festen Körper ausgebreiteten und denselben allseitig bedeckenden Flüssigkeit, welche einzig der Attraction unterworfen ist, ist nur unter der Voraussetzung stabil, dass die Dichte derselben jene des festen Kernes nicht übersteigt; — wenigstens wenn der feste Kern eine Kugel oder ein Ellipsoid ist.
 - 5) Die Richtigkeit der von de la Rive aufgestellten Theorie des Nordlichtes scheint sehr zweifelhaft zu sein.
 - 6) Es ist nicht anzunehmen, dass bei langen Telegraphenleitungen die Erdschicht zwischen den beiden Erdplatten als Leiter des elektrischen Stromes dient.
 - 7) Aus den Dämmerungs-Erscheinungen lässt sich nicht ableiten, dass die Höhe der Atmosphäre etwa 9 Meilen beträgt.
-

Giesen, Arnold,

Beiträge zur Attractionstheorie

Bonn 1869

Math.a. 90 I

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11010998-8